Zadania z Matematyki Dyskretnej – Rekurencja

1. Podać wzór ogólny ciągu

   (a) $s_n = s_{n-1} + 6s_{n-2}$ dla i) $s_0 = 1$, $s_1 = 13$
   ii) $s_0 = 2$, $s_1 = 1$

   (b) $s_n = 3s_{n-1} - 2s_{n-2}$ dla i) $s_0 = 1$, $s_1 = 1$
   ii) $s_0 = 0$, $s_1 = 6$

   (c) $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2}$ dla i) $s_0 = 1$, $s_1 = 6$
   ii) $s_0 = -2$, $s_1 = -8$

   (d) $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ dla i) $s_0 = 3$, $s_1 = 8$
   ii) $s_0 = 2$, $s_1 = 0$

2. Dane problemy rozwiązano za pomocą metody „Dziel i rządź”. Niech $f(n)$ oznacza funkcję złożoności. Ułożyć równanie rekurencyjne na $f(n)$ i je rozwiązać.

   (a) Znajdowanie danego elementu w uporządkowanym ciągu.

   (b) Znajdowanie największego elementu w nieuporządkowanym ciągu.

   (c) Sortowanie ciagu.

3. Podać wzór jawny na s_n dla $n = 2^m \quad m \in \mathbb{N}$

   (a) $s_{2n} = 2s_n + 2 + 2n$ dla i) $s_1 = 1$, ii)$s_1 = 2$

   (b) $s_{2n} = 2s_n + 5 - 3n$ dla i) $s_1 = 1$, ii)$s_1 = 2$

   (c) $s_{2n} = 2s_n - 4 + 7n$ dla i) $s_1 = 1$, ii)$s_1 = 2$

4. Niech n oznacza liczbę klatek ustawionych w szeregu, k liczbę lwów (lwy są nierozróżnialne), funkcja $g(n, k)$ liczbę sposobów rozlokowania k lwów w n klatkach, w taki sposób, żeby żadne dwa nie sąsiadowały ze sobą. Znaleźć:

   (a) $g(2k - 1, k)$

   (b) $g(2k - 1, k)$ dla $n < 2k - 1$

   (c) $g(n, 1)$

   (d) $g(n, k)$

   (e) $g(2k, k)$

   (f) Policzyć $g(6, 4), g(7, 4), g(8, 4), g(12, 5)$

   (g) Czy istnieje ogólny wzór na $g(n, k)$?