Zadania z Matematyki Dyskretnej – Rachunek zdań i predykaty

1. Sprawdzić za pomocą tablic logicznych, czy poniższe formuły są tautologiami:
a) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \cup r))$;
b) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$;
c) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;
d) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$;
e) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \vee q)$;
f) $((p \vee q) \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$;
g) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

2. Zapisać w postaci formuły logicznej i sprawdzić wartość logiczną zdań:
a) *Jeśli Ziemia jest okrągła, to z faktu, że Ziemia jest płaska, wynika, że Ziemia jest gwiazdą*;
b) *Jeśli figura A jest czworokątem i A ma wszystkie kąty równe, to z faktu, że A jest czworokątem, wynika, że A ma wszystkie boki równe*;
c) *To, że student się nie uczy i ściąga na kolokwiach jest równoważne temu, że nieprawdą jest, że (się uczy lub nie ściąga na kolokwiach).*

3. Załóżmy, że zdanie $p \rightarrow q$ jest fałszywe. Podać wartości logiczne zdań $p \wedge q$, $p \vee q$, $q \rightarrow p$, $(p \wedge \neg q) \vee \neg p$.

4. Napisać zdanie złożone, które jest prawdziwe wtedy, gdy dokładnie jedno z trzech zdań p, q, r jest prawdziwe.

5. Podać wartość logiczną następujących formuł:
a) $\exists x(x^3 - x = 0)$;
b) $\forall x \exists y((x \cdot y) = 5)$;
c) $\exists x \forall y((x + y)^2 = x^2 + y^2)$;
d) $\forall x \forall y(x^2 - y^2 = (x - y)^2)$.

6. Określić, które zmienne są wolne, a które związane:
a) $\forall x \forall y \ p(x, y, z)$;
b) $[\forall x \exists y \ p(x, y, z)] \rightarrow q(x, y, z)$;
c) $\forall x \forall y \ p(x, y, z) \wedge \exists z \ q(x, y, z)$;
d) $\forall x \ p(x, y, z) \rightarrow [\forall z(\forall y \ q(x, y, z)) \wedge \exists x \ r(x, y, z)]$.

7. Zapisać za pomocą symboliki logicznej następujące zdania:
a) *Każdą liczbę naturalną można przedstawić jako iloczyn pewnej liczby nieparzystej i pewnej potęgi liczby 2*;
b) *Każdy człowiek ma dwoje rodziców*;
c) *Jeśli proste na płaszczyźnie nie są równoległe, to istnieje dokładnie jeden punkt wspólny tych prostych*;
d) *Istnieje jedna najmniejsza liczba naturalna*;
e) *Funkcja $f(x)$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe*;
f) *Liczba x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb y i z*;
g) *Między liczbami n i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza*;
h) *Każda liczba daje przy dzieleniu przez 2 resztę 0 lub 1.*

8. Dla następujących formuł pokazać, że są spełnialne, ale nie są tautologiami:
a) $\forall x \exists y \forall z(p(z, y) \rightarrow q(z, x))$;
b) $\forall x \forall y \exists z(q(x, z) \wedge q(z, y)) \rightarrow p(x, y)$.