Zadania z Matematyki Dyskretnej - Notacja O i zbiory uporządkowane

1. Notacja O

   (a) Dla każdego z poniższych ciągów znajdź najmniejszą liczbę $k \in \mathbb{Q}$ taką, że $f(n) = O(n^k)$:

      i. $5n^4 - 3n^3 + 2n^2 + 4n + 2$
      ii. $(n+1)^2(3n^2 + 2n)$
      iii. $\sqrt{n + 100}$
      iv. $\sqrt{n^2 + 3n}$
      v. $(1.5)^n$
      vi. $log_2 n$
      vii. $n^2 log_2 n$

   (b) Czy jest prawdą? Uzasadnij odpowiedź.

      i. $2^{n+1} = O(2^n)$
      ii. $2^{2n} = O(2^n)$
      iii. $(n+1)! = O(n!)$
      iv. $(2n)! = O(n!)$
      v. $(\sqrt{n} + 1)^4 = O(n^2)$
      vi. $n + 3log_2 n = O(log_2 n)$
      vii. $\sqrt{n}(n+3) = O(nlog_2 n)$
      viii. $\sqrt{n^2 + 1} + 3log_2 n = O(nlog_2 n)$
      ix. $\sqrt{3n^3 + 2n^2 + 1} + n^2\sqrt{log_2 n} = O(n^2)$

2. Zbiory uporządkowane

   (a) Narysuj diagram Hassego zbioru $A = (\{1, 2, 3, 5, 7, 12, 15, 18, 36\}, |)$, gdzie $m|n$ oznacza, że m jest dzielnikiem n. Wskaż, o ile istnieją: element największy, najmniejszy, elementy maksymalne i minimalne. Jaki element należałoby dodać do A, aby istniał w nim element największy? Jaki jest najdłuższy łańcuch w A?

   (b) i. Jak wygląda diagram Hassego zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z porządkiem produktowym $(n, m) \preceq (k, l) \iff n \leq k \wedge m \leq l$.
      Gdzie znajdują się te elementy $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dla których $(1, 1) \preceq (m, n) \preceq (3, 2)$?

      ii. To samo polecenie dla porządku leksykograficznego.

(c) Niech $\Sigma = \{a, b\}$, gdzie $a \prec b$. Ustaw w porządku:

i. standardowym $(\Sigma^*, \preceq^*)$

ii. leksykograficznym $(\Sigma^*, \preceq_L)$

następujące słowa:

$aba, ab, aaba, baba, baab, aabb$.

Ile i jakie słowa leżą między słowami ab i b w każdym z tych porządków? A między słowami b i ba?

(d) Niech Σ będzie pewnym alfabetem. Dla $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ powiemy, że $w_1 \preceq w_2$, jeśli w Σ^* istnieją słowa w i w' takie, że $w_2 = ww_1w'$. Czy $\preceq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze Σ^*?