Zadania z Matematyki Dyskretnej - Funkcje

1. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Które z poniższych relacji są funkcjami ?

   (a) $R_1 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

   (b) $R_2 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5), (1, 5)\}$

   (c) $R_3 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 5), (3, 4)\}$

   (d) $R_4 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 4)\}$

2. Czy dana funkcja jest różnowartościowa,"na", znaleźć obrazy i przeciw obrazy.

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 3x + 2$
   $f((0, 1)), f([-2, 1]), f(\{1, 2\}), f^{\leftarrow}((-\infty, -6)), f^{\leftarrow}(\{-3, -4\})$.

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x + 1$
   $f([0, \frac{3}{2}\pi]), f(\{0, \pi\}), f(\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\}), f^{\leftarrow}((\frac{1}{2}, \infty)), f^{\leftarrow}((-\infty, -1]), f^{\leftarrow}(0)$.

   (c) $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \phi([x_1, .., x_n]) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$
   $\phi^{\leftarrow}(-1), \phi^{\leftarrow}(0), \phi^{\leftarrow}(1)$.

   (d) $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \phi(n, k) = n + k + 1$.
   $\phi(\mathbb{N} \times \{1\}), \phi^{\leftarrow}(0), \phi^{\leftarrow}(5)$.

   (e) $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \phi(n, k) = nk$.
   $\phi(\mathbb{N} \times \{2\}), \phi^{\leftarrow}(0), \phi^{\leftarrow}(\{2^n : n \in \mathbb{N}\})$.

   (f) $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \phi(n, k) = n^2 + k^2$.
   $\phi^{\leftarrow}(0), \phi^{\leftarrow}(24)$.

   (g) $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \phi(n, k) = \max(n, k)$.
   $\phi^{\leftarrow}(0), \phi^{\leftarrow}(k)$.

   (h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.
   $f((2, \infty)), f(\{0, 1, 2, 3, 4\}), f^{\leftarrow}([0.5, 1]), f^{\leftarrow}((0, 1)), f^{\leftarrow}(\{0\})$.

3. Udowodnić.

   (a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

   (b) $A \subset f^{\leftarrow}(f(A))$

4. Pokazać kontrprzykłady, ze inkluzji nie można zastąpić równościami.

   (a) $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B)$

   (b) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

   (c) $f^{\leftarrow}(A) \subset f^{\leftarrow}(B)$ jeśli $A \subset B$

5. Zlożyć funkcje f, g i h w różnej kolejności. Sprawdzić dziedzinę.

   (a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2$

   (b) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \log x$, $h(x) = \frac{1}{x}$

6. Obliczyć (a) $\frac{8!}{6!}$ (b) $\frac{9!}{5!}$ (c) $\frac{12!}{5!4!}$ (d) $\frac{8!}{1!2!3!4!}$ (e) $\frac{4!}{2!0!}$
   (f)$\sum_{i=1}^{100}(-1)^i i$ (g)$\sum_{i=1}^{4}(i^2+1)$ (h) $\sum_{i=1}^{4}(i^2)+1$ (i)$\sum_{i=1}^{10}(-1)^i$

7. Napisać wzór ogólny
   (a) $\sum_{i=0}^{n} 2^i$
   (b) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$
   (c) $\prod_{k=n}^{m} k$

8. Dla jakiego zbioru funkcja $b(n) = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$ jest funkcją charakterystyczną?

9. Napisz wzór ogólny ciągów a_n, b_n, c_n jeśli
   (a) $a_n = a_{n-1}n, b_n = a_n + a_{n-1}, c_n = \frac{a_n}{b_n}$ $a_0 = 1$
   (b) $a_n = a_{n-1}^2, b_n = a_n : a_{n-1}, c_n = a_n + b_n$ $a_0 = 2$

10. Obliczyć (a) $\sum_{i=1}^{n}(x^i + \frac{1}{x^i})^2$ (b) $\sum_{i=1}^{n}(x^i - \frac{1}{x^i})^2$

11. Dany jest ciąg $(a+b)^2, a^2+b^2, (a-b)^2, ...$ obliczyć sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.