Zadania z Matematyki Dyskretnej – Struktury Algebraiczne

1. Sprawdzić, czy następujące działanie jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny:

   a) $a * b = \frac{a+b}{2}$ w $\mathbb{Q}$, b) $w_1 \otimes w_2 = w_1 w_2$ w Σ^* c) $a \odot b = a + b + ab$ w $\mathbb{R}$

2. Sprawdzić, czy następujący zbiór z danym działaniem jest grupą, a jeśli tak, to czy jest grupą przemienną:

   a) $(\mathbb{Z}, +)$ b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ c) $(\mathbb{R}, +)$ d) $(\mathbb{R}, \cdot)$ e)$(\{-1, 1\}, \cdot)$ f) $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ g) $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$

3. Sporządzić tabelkę grupy izometrii:

   a) prostokąta - Izom_p, b) trójkąta równobocznego - D_3

4. Dane są permutacje

   $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ i $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

   rozłożyć je na cykle rozłączne, obliczyć $\pi \circ \sigma$, $\sigma \circ \pi$, π^{-1}, rozłożyć na transpozycje.

5. Które z poniższych grup są grupami przemiennymi, a które z nich cyklicznymi:

   a) $\mathbb{Z}_4$, b) $\mathbb{Z}_5$, c) S_3, d) D_4, e) grupa obrotów płaszczyzny o wielokrotność kąta $\frac{\pi}{3}$ wokół ustalonego punktu, f) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, g) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, h) $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$?

6. (Tw. Lagrange'a bez dowodu)

   Znajdź wszystkie podgrupy grupy:

   a) $\mathbb{Z}_5$, b) $\mathbb{Z}_6$, c) Izom_p, d)S_3.

7. Czy jest homomorfizmem grup funkcja:

   a) $\phi_1 : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6$ i $\phi_1(1) = 3$,

   b) $\phi_2 : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_9$ i $\phi_2(1) = 1$,

   c) $\phi_3 : \mathbb{Z}_6 \to \mathrm{Izom}_p$ i $\phi_3(1) = O_\pi$,

   d) $\phi_4 : \mathrm{Izom}_p \to \mathbb{Z}_8$ i $\phi_4(O_\pi) = 4$ i $\phi_4(S_a) = 4$,

   e) $\phi_5 : \mathrm{Izom}_p \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ i $\phi_5(O_\pi) = (0, 1)$ i $\phi_5(S_a) = (1, 0)$,

   f) $\phi_6 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ i $\phi_6(1) = 1$,

   g) $\phi_7 : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ i $\phi_7(1) = 1$,

   h) $\phi_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ i $\phi_8(1) = 1$,

   i) $\phi_9 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ i $\phi_9(1) = 1$,

   Dla tych, które są, znajdź jądra i obrazy.

8. Niech $\phi : (G, \cdot) \to (H, \circ)$ będzie homomorfizmem grup. Udowodnij, że $\mathrm{Ker}(\phi)$ jest podgrupą grupy G, a $\mathrm{Im}(\phi)$ podgrupą grupy H.