Zadania z Matematyki Dyskretnej – Zbiory

1. Niech a, b, c, d będą różne od zbioru pustego. Jakie zależności muszą między nimi zachodzić, żeby zachodziły następujące równości:

   a) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$, b) $\{a, b, a\} = \{a, b\}$, c) $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, d) $\{\{a, b\}, c\} = \{\{a\}, c\}$, e) $\{\{a, b\}, \{d\}\} = \{\{a\}\}$, f) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

2. Obliczyć $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ dla:

   (a) $A = \{a, b, c\},\ B = \{c, d\}$,

   (b) $A = \{x, y, \{z\}\},\ B = \{a, x, y\}$,

   (c) $A = \{\{a, \{b\}\}, c, \{c\}, \{a, b\}\},\ B = \{\{a, b\}, c, \{b\}\}$,

   (d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\},\ B = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$.

3. Niech przestrzeń U będzie zbiorem wszystkich wielokątów, A zbiorem trójkątów równoramiennych, B zbiorem trójkątów równobocznych, C zbiorem trójkątów prostokątnych. Znaleźć: $(A \cap B) \cap C$, $(A \cap B^c) \cap C$, $A^c \cap (B \cap C)$, $A^c \cap (C \cap B^c)$, $(A \cap B) \cap C^c$.

4. Znaleźć zależności miedzy zbiorami A, B i C jeśli

   (a) $A \cup B = \emptyset$,

   (b) $A \setminus B = \emptyset$,

   (c) $A \cap B = \emptyset$,

   (d) $A \setminus B = B \setminus A$.

   (e) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$,

   (f) $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$,

   (g) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$.

5. Określić czy prawdziwe są równości:

   (a) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$

   (b) $A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C)$

   (c) $(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \cap B) \setminus C$

   (d) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$

   (e) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

   (f) $A \setminus (B \setminus A) = A$

(g) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

(h) $(A \cap B) \cup C = (A \cap B) \setminus C$

(i) $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup [(A \cap C) \setminus D]$

(j) $[A^c \cup B] \cap A = A \cap B$

6. Czy z faktu $A \cap B = B \cap C = \emptyset$ wynika, ze $A \cap C = \emptyset$?

7. Czy z faktu $A \cup B = B \cup C = X$ wynika, że $A \cup C = X$?

8. Udowodnić, że:

   (a) $A = B$ wtedy i tylko wtedy $A \oplus B = \emptyset$

   (b) $A \oplus C \subseteq (A \oplus B) \cup (B \oplus C)$

   (c) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

   (d) $(A \oplus B) \cup (A \cap B) = A \cup B$

9. Znaleźć iloczyn kartezjański $A \times B$ i $B \times A$ dla:

   (a) $A = \{0, 1, 2\},\ B = \{0, 2, 3\}$,

   (b) $A = \{1\},\ B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

   (c) $A = \emptyset,\ B = \{1, 2, 3\}$.

10. Niech $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$, $B = \{w \in \Sigma^* : Długość(w) \geqslant 2\}$, $C = \{w \in \Sigma^* : Długość(w) \leqslant 2\}$, przestrzenią jest Σ^*. Wyznaczyć: $A \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $A \oplus C$, $\Sigma^* \setminus B$, $\Sigma \setminus B$, $\Sigma \setminus C$, $B^c \cap C^c$, $(B \cap C)^c$, $(B \cup C)^c$, $B^c \cup C^c$, $A^c \cap C$, $A^c \cap B^c$.

11. Wykazać, ze zbiór n elementowy ma 2^n podzbiorów.