Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Za każde zadanie możesz uzyskać 0 lub 1 punkt. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
odpowiedź										
pytanie	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
odpowiedź										

1. Wskaż tautologie rachunku zdań.

   (a) $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$, (b) $\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$, (c) $((p \to q) \vee (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \vee r))$.

2. Niech predykat $K(x, y, t)$ wyraża, że osoba x kocha osobę y w czasie t. Formuła $\exists_y \forall_x \forall_t K(x, y, t)$ wyraża, że

   (a) Kiedyś każdy kocha każdego. (b) Każdy kocha kogoś kiedyś.

   (c) Ktoś nigdy nie jest kochany przez nikogo.

3. Relacja r jest zdefiniowana w zbiorze ciągów binarnych długości co najmniej 4, tak że $(x, y) \in r$ wttw ciągi x i y mają takie same 4 pierwsze pozycje. Ile klas abstrakcji ma ta relacja?

   (a) 8, (b) ∞, (c) 16.

4. Wskaż relacje równoważności.

   (a) r jest relacją określoną w zbiorze ciągów polskich liter, taką że $(a, b) \in r$ wttw $l(a) > l(b)$, gdzie $l(x)$ jest długością ciągu x.

   (b) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in r$ wttw $|x - y| < 8$. (c) $r \subseteq \mathbb{Z}^2$, $(a, b) \in r$ wttw $a - b$ jest podzielne przez 4.

5. Niech $r \subseteq \mathbb{Z}^2$. Wskaż relacje spełniające podany warunek.

   (a) $(x, y) \in r$ iff $x^2 = y^2$; antysymetryczność, (b) $(x, y) \in r$ iff $|x - y| > 10$; przechodniość,

   (c) $(x, y) \in r$ iff $|x| - |y| > 0$; przeciwzwrotność.

6. Stosując zasadę szufladkową Dirichleta można udowodnić, że jeśli z pierwszych 6 dodatnich liczb całkowitych wybierzemy k, to wśród nich musi istnieć para liczb, których suma wynosi 7, jeśli

   (a) $k = 3$, (b) $k = 4$, (c) $k = 5$.

7. Na ile sposobów można ułożyć 8 różnych, kolorowych kluczy na breloczku (czyli w kółko) tak by dwa klucze od domu (czerwony) i od piwnicy (niebieski) nie znajdowały się obok siebie.

   (a) $7!$, (b) $2 \cdot 5 \cdot 6!$, (c) $5 \cdot 6!$.

8. Załóżmy, że 30 studentów zebrało się by grać w piłkę nożną. Istnieje 5 małych, różnych boisk, gdzie studenci mogą poćwiczyć. Na ile różnych sposbów można przypisać studentów do boisk, tak by na każdym ktoś grał?

   (a) $S(30, 5)$, (b) $S(30, 5) \cdot 5!$, (c) $C^6_{30} \cdot C^6_{24} \cdot C^6_{18} \cdot C^6_{12} \cdot C^6_6$.

9. Załóżmy, że 10 studentów zebrało się by grać w piłkę nożną. Istnieją 4 małe, różne boiska, gdzie studenci mogą poćwiczyć. Studenci mają 8 identycznych piłek. Na ile sposbów można rozdzielić piłki, tak by na każdym boisku była co najmniej jedna?

   (a) $\overline{C}^4_4$, (b) $S(8, 4) \cdot 4!$, (c) C^7_4

10. Wskaż zbiory uporządkowane (tzn. zbiory ze zdefiniowaną w nich relacją porządku częściowego).
    (a) $A = \mathbb{Z}$, $r = \{(a, b) : b = a \cdot k \ \ dla \ \ k \in \mathbb{Z}\}$, (b) $A = \mathbb{Z}$, $r = \{(a, b) : |a| = |b|\}$
    (c) A jest zbiorem potęgowym pewnego zbioru, $r = \{(X, Y) : X \cup Y = Y\}$,

11. Ile pięciocyfrowych kodów można zbudować z różnych cyfr, tak aby różnica między największą i najmniejszą cyfrą nie była większa niż 4?
    (a) $C_{10}^5 \cdot 5!$, (b) $7 \cdot 4!$, (c) $6 \cdot 5!$.

12. Istnieje częściowo uporządkowany zbiór, który
    (a) nie ma ani największego, ani maksymalnego elementu.
    (b) ma minimalny element, ale nie ma najmniejszego.
    (c) ma największy element, ale nie ma maksymalnego.

13. Które stwierdzenia są prawdziwe?
    (a) Jeśli G jest nieskierowanym, spójnym grafem, który ma n wierzchołków, to ma on co najmniej $n - 1$ krawędzi.
    (b) Jeśli G jest skierowanym grafem, to każde dwa wierzchołki są połączone drogą.
    (c) Jeśli G jest nieskierowanym, acyklicznym grafem, który ma n wierzchołków, to G ma co najwyżej $n - 1$ krawędzi.

14. Niech zbiór potegowy zbioru $\mathbb{N}$ będzie uporządkowany przez relację **zawierania** ($\subseteq$). Wskaż poprawne zależności.
    (a) Jeśli $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$, $C = \{1\}$, to $sup\{A, B, C\} = \{2, 3, 4, 6\}$.
    (b) Jeśli $A = \{1, 2, 10\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, \}$, $C = \{1, 2\}$, to $inf\{A, B, C\} = \{1, 2\}$.
    (c) Jeśli $A = \{1, 2\}$ i $B = \{2, 4\}$, to $sup\{A, B\} = \{2, 4\}$.

15. Wskaż zbiory przeliczalne.
    (a) Zbiór wszystkich ciągów binarnych. (b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.
    (c) Zbiór potęgowy zbioru $\{-4, 0, 3, 2\}$.

16. Wskaż poprawne zależności.
    (a) $7n^2 + \sqrt{n} = \mathcal{O}(n^2 \cdot lg(n))$, (b) $(n^5 + n) \cdot lg(n^n) = \mathcal{O}(n^6 + lg(n^n))$,
    (c) $2^n + n! = \mathcal{O}(n^n + n^2)$.

17. Niech $\Omega = \{@, \#, \$, \%\}$ będzie uniwersum oraz $A = \{@, \#\}$, $B = \{\#, \$, \%\}$. Wówczas
    (a) $(A \cup B)' = \emptyset$, (b) $(\Omega \cap B)' = \emptyset$, (c) $(\Omega \backslash B)' = B$.

18. Implikacja "Jeśli A jest podzbiorem B i B jest elementem C, to A jest elementem C" jest prawdziwa
    (a) dla dowolnych zbiorów A, B, C, (b) dla pewnych zbiorów A, B, C, (c) nigdy.

19. Ciąg $s(n) = 3^n - 2n3^n$ jest rozwiązaniem rekurencji
    (a) $s(0) = s(1) = 1$; $s(n) = 6s(n-1) - 9s(n-2)$ dla $n > 1$,
    (b) $s(0) = 1$, $s(1) = -3$; $s(n) = 6s(n-1) - s(n-2)$ dla $n > 1$,
    (c) $s(0) = 1$, $s(1) = -3$; $s(n) = 6s(n-1) - 9s(n-2)$ dla $n > 1$.

20. Nie pamiętasz jaki jest kod do czterocyfrowego zamka w Twojej walizce. Wiesz tylko, że nie użyłeś żadnej cyfry więcej niż raz. Ile (maksymalnie) różnych sposobów musisz wypróbować?
    (a) $4!$, (b) C_{10}^4, (c) 5040.

Oznaczenia:
C_n^k (V_n^k) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) ze zbioru n-elementowego.
$\overline{C}_n^k$ ($\overline{V}_n^k$) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
$S(n, k)$ - liczba sposobów podzielenia n obiektów na k niepuste podzbiory.

ODPOWIEDZI: 1abc 2- 3c 4c 5c 6bc 7c 8b 9ac 10c 11c 12ab 13ac 14b 15- 16ac 17ac 18b 19c 20c

Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
odpowiedź										
pytanie	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
odpowiedź										

1. W teorii grafów mostem nazywamy taką krawędź grafu spójnego, po której usunięciu przestaje być on spójny. Jeśli w grafie każdy wierzchołek ma parzysty stopień, to graf ten

   (a) nie zawiera mostu, (b) może zawierać most, (c) na pewno posiada most.

2. Formuła $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$ jest

   (a) tautologią, (b) spełnialna, (c) falsyfikowalna.

3. Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru liczb parzystych w zbiór $\{a, b, c\}$ jest

   (a) równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, (b) przeliczalny, (c) nieprzeliczalny.

4. W zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ wprowadzamy relację r wzorem $(x, y) \in r$ wttw $Re(y) \leq Re(x)$ oraz $Im(y) \leq Im(x)$, gdzie $Re(x)$ oznacza część rzeczywistą liczby x, a $Im(x)$ oznacza część urojoną liczby x. Zbiór $(\mathbb{C}, r)$ jest

   (a) częściowo uporządkowany, (b) liniowo uporządkowany, (c) dobrze uporządkowany.

5. Stosując zasadę indukcji matematycznej można udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n, $n^7 - n$ jest podzielne przez

   (a) 7, (b) 2, (c) 14.

6. Dana jest rekurencyjna definicja ciągu. Wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu $a(0) = 2$, $a(1) = 3$, $a(n+1) = 3a(n) - 2a(n-1)$ dla $n > 0$ to

   (a) $a(n) = 1 + 2^n$, (b) $a(n) = 2^n$, (c) $a(n) = 2^{n+1}$.

7. Na półce stoi 15 książek. Iloma sposobami można spośród nich wybrać 5 książek, tak aby nie brać żadnych dwóch stojących obok siebie?

   (a) $\binom{11}{6}$, (b) $\binom{10}{5}$, (c) $\binom{15}{5}$.

8. Na arenę cyrkową mają wejść 4 lwy i 3 tygrysy. Nie można dopuścić do tego by jeden tygrys wchodził zaraz po drugim. Na ile sposobów można je ustawić do wejścia, jeśli założymy, że lwy są nieodróżnialne i tygrysy są nieodróżnialne?

   (a) 6, (b) 4, (c) 35.

9. Rzucamy 3 razy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Niech X oznacza zmienną losową określającą liczbę rzutów, w których suma wyrzuconych oczek jest nieparzysta. $P(X = 0)$ wynosi

   (a) 0, (b) $\frac{1}{8}$, (c) $\frac{3}{8}$.

10. Niech $A = \{Kant, Hegel, Bismarck, Sartre, Napoleon, Marks\}$ oraz $r \subseteq A^2$ i $r = \{(Kant, Hegel), (Kant, Bismarck), (Bismarck, Kant), (Sartre, Napoleon), (Sartre, Marks)\}$. Wskaż poprawne zależności:

    (a) $(Kant, Kant) \in r \circ r$, (b) $(Kant, Kant) \in r^{-1}$, (c) $(Kant, Bismarck) \in r^{-1}$.

11. Które z podanych formuł są tautologiami rachunku predykatów?

    (a) $\neg\forall_x\forall_y P(x,y) \to \exists_x\exists_y(\neg P(x,y))$, (b) $\forall_x\exists_y P(x,y) \to \exists_x\forall_y P(x,y)$,

    (c) $(\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)) \to \forall_x(P(x) \vee Q(x))$.

12. Przypomnijmy, że $|A|$ oznacza moc zbioru A. Rozważmy zbiór X taki, że $|X| = 100$. Wówczas $|\{X\}|$ wynosi

    (a) 1, (b) 100, (c) 101.

13. Relacja r taka, że $(a,b) \in r$ wttw a lubi b określona w zbiorze ludzi jest

    (a) symetryczna, (b) przechodnia, (c) zwrotna.

14. Niech r będzie relacją równoważności określoną w zbiorze X takim, że $|X| > 1$. Wiemy, że r ma dwie klasy abstrakcji. Jeśli $a \in X$ i $a \in [x]_r - [y]_r$ dla pewnych elementów $x, y \in X$, to

    (a) $(a,x) \in r$, b) $(a,y) \in r$, c) $(x,y) \in r$.

15. Niech $S = \{a,b,c\}$ będzie alfabetem wraz z określoną w nim relacją $r = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,c)\}$. Relacja ta jest relacją porządku

    (a) częściowego, b) liniowego, c) dobrego.

16. Jeśli $f(n) = 2^n \cdot (n + n^3 + 1)$, i $g(n) = (n^3 + n) \cdot (2^n + n + 1)$, to

    (a) $(g+f) = \mathcal{O}(f)$, (b) $g = \mathcal{O}(f)$, (c) $f = \mathcal{O}(g)$.

17. Jeśli $|A \times B| = |B \times A|$, to

    (a) $A = B = \emptyset$, (b) $|A| = |B|$, (c) $A = B$.

18. Czy schemat $\frac{A \to (B \wedge C)}{(\neg B) \to (\neg A)}$ jest poprawną regułą wnioskowania rachunku zdań?

    a) nie, (b) tak, (c) nie można tego ustalić.

19. Wskaż prawdziwe własności?

    (a) Jeśli G jest grafem nieskierowanym, posiadającym k wierzchołków, takim że każdy wierzchołek jest incydentny z parzystą liczbą krawędzi, to G posiada cykl.

    (b) Jeśli G jest grafem nieskierowanym, takim że dla każdych dwóch wierzchołków istnieje co najmniej jedna ścieżka łącząca je, to G ma cykl.

    (c) Jeśli G jest grafem nieskierowanym i spójnym, to dla każdych dwóch wierzchołków istnieje ścieżka łącząca je.

20. Jeżeli liczba trzyelementowych kombinacji pewnego zbioru n elementowego jest sześć razy mniejsza od liczby trzyelementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru, to

    (a) n może być dowolną liczbą naturalną większą niż 2

    (b) n musi być równe 3,

    (c) n może być dowolną liczbą naturalną mniejszą niż 3.

ODPOWIEDZI: 1a 2ab 3c 4a 5abc 6a 7a 8- 9b 10ac 11ac 12a 13- 14a 15- 16abc 17- 18b 19ac 20a

Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odpowiedź										
pytanie	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
odpowiedź										

1. Formuła $((p \to q) \vee \neg r) \to (r \to \neg p)$ jest

   (a) tautologią, (b) spełnialna, (c) falsyfikowalna.

2. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału (2,3) jest

   (a) równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, (b) przeliczalny, (c) nieprzeliczalny.

3. W zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ wprowadzamy relację r wzorem $(x, y) \in r$ wttw $Re(y) \leq Re(x)$ oraz $Im(y) \leq Im(x)$, gdzie $Re(x)$ oznacza część rzeczywistą liczby x, a $Im(x)$ oznacza część urojoną liczby x. Zbiór $(\mathbb{C}, r)$ jest

   (a) częściowo uporządkowany, (b) liniowo uporządkowany, (c) dobrze uporządkowany.

4. Rzucamy 3 razy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Niech X oznacza zmienną losową określającą liczbę rzutów, w których suma wyrzuconych oczek jest nieparzysta. $P(X = 0)$ wynosi

   (a) 0, (b) $\frac{1}{8}$, (c) $\frac{3}{8}$.

5. Niech $A = \{Kant, Hegel, Bismarck, Sartre, Napoleon, Marks\}$ oraz $r \subseteq A^2$ i $r = \{(Kant, Hegel), (Kant, Bismarck), (Bismarck, Kant), (Sartre, Napoleon), (Sartre, Marks), (Hegel, Marks)\}$. Wskaż poprawne zależności:

   (a) $(Bismarck, Bismarck) \in r \circ r$, (b) $(Bismarck, Kant) \in r^{-1}$, (c) $(Kant, Marks) \in r \circ r$.

6. Które z podanych formuł są tautologiami rachunku predykatów?

   (a) $\neg \exists_x \exists_y P(x, y) \to \forall_x \forall_y (\neg P(x, y))$, (b) $\exists_x \forall_y P(x, y) \to \forall_x \exists_y P(x, y)$,

   (c) $\forall_x (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x))$.

7. Przypomnijmy, że $|A|$ oznacza moc zbioru A. Rozważmy zbiór X taki, że $|X| = 100$. Wówczas $|\{X, \{X\}\}|$ wynosi

   (a) 1, (b) 200, (c) 102.

8. Relacja r taka, że $(a, b) \in r$ wttw a jest klientem b określona w zbiorze firm jest

   (a) antysymetryczna, (b) przechodnia, (c) spójna.

9. Niech r będzie relacją równoważności określoną w zbiorze X takim, że $|X| > 1$. Wiemy, że r ma dwie klasy abstrakcji. Jeśli $a \in X$ i $a \in [x]_r \cap [y]_r$ dla pewnych elementów $x, y \in X$, to

   (a) $(a, x) \in r$, b) $(a, y) \in r$, c) $(x, y) \in r$.

10. Niech $S = \{a, b, c\}$ będzie alfabetem wraz z określoną w nim relacją $r = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$. Relacja ta jest relacją porządku

    (a) częściowego, b) liniowego, c) dobrego.

11. Jeśli $f(n) = n^2 \cdot (n + n^3 + 1)$, i $g(n) = (n^3 + n) \cdot (2^n + n + 1)$, to

    (a) $(g + f) = \mathcal{O}(f)$, (b) $g = \mathcal{O}(f)$, (c) $f = \mathcal{O}(g)$.

12. Czy schemat $\frac{A \to (B \vee C)}{(\neg B) \to (\neg A)}$ jest poprawną regułą wnioskowania rachunku zdań?

    a) nie, (b) tak, (c) nie można tego ustalić.

13. W koszu są 2 jabłka zielone, 3 czerwone i 4 żółte. Jan z zawiązanymi oczami wybiera z kosza dowolną liczbę jabłek. Ile najmniej powinien ich wziąć by mieć pewność, że ma dwa jabłka tego samego koloru?

    (a) 4, (b) 3, (c) 2.

14. Na ile sposobów można rozmieścić 10 osób w 3 różnych pokojach tak, by żaden z pokoi nie pozostał pusty?

    (a) $S(10, 3)$, (b) 10^3, (c) $S(7, 4) \cdot 4!$.

15. 10 osób dzielimy na 3 grupy (grupy nie muszą być równoliczne, ale muszą być dokładnie 3). Każda grupa będzie miała do wykonania to samo zadanie. Na ile sposobów można dokonać takiego podziału?

    (a) $S(10, 3)$, (b) 10^3, (c) $S(7, 4) \cdot 4!$.

16. Ile jest różnych bajtów zawierających dokładnie 3 jedynki? Bajt to słowo ośmiobitowe, czyli złożone z ośmiu cyfr 0 lub 1.

    (a) V_8^3, (b) C_8^3 , (c) $\overline{C}_8^3$.

17. Jeżeli liczba czteroelementowych kombinacji pewnego zbioru n elementowego jest dwadzieścia cztery razy mniejsza od liczby czteroelementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru, to

    (a) n może być dowolną liczbą naturalną większą niż 2,

    (b) n może być dowolną liczbą naturalną większą niż 3,

    (c) n może być dowolną liczbą naturalną.

18. Na arenę cyrkową ma wejść 7 lwów i 8 tygrysów. Nie można dopuścić do tego by jeden tygrys wchodził zaraz po drugim. Na ile sposobów można je ustawić do wejścia, jeśli założymy, że lwy i tygrysy ubrane są w odróżniające je, różnokolorowe chusty?

    (a) $8!7!$, (b) $\binom{14}{7}$, (c) $5 \cdot 4! \cdot 4!$.

19. Dana jest rekurencyjna definicja ciągu. Wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu $a(0) = 2$, $a(1) = -1$, $a(n+1) = -a(n) + 6a(n-1)$ dla $n > 0$ to

    (a) $a(n) = 2^n + (-3)^n$, (b) $a(n) = (-2)^n + 3^n$, (c) $a(n) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{3}{2} \cdot 3^n$.

20. Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem niezorientowanym, spójnym, o n wierzchołkach, to G

    (a) ma co najmniej $n - 1$ krawędzi, (b) jest drzewem, (c) ma co najwyżej $n - 1$ krawędzi.

Notacja:
C_n^k (V_n^k) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego.
$\overline{C}_n^k(\overline{V}_n^k)$ - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
$S(n, k)$ - liczba Stirlinga II rodzaju wyznaczająca liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów,
B_n - liczba Bella dla liczby naturalnej n.

ODPOWIEDZI: 1bc 2c 3a 4b 5abc 6ab 7– 8– 9abc 10– 11c 12a 13a 14– 15a 16b 17b 18a 19a 20a

Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
odpowiedź										
pytanie	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
odpowiedź										

1. Załóżmy, że zdanie a jest fałszywe. Wskaż zdania, które są prawdziwe dla każdego zdania b.

   (a) $(a \vee b) \leftrightarrow b$, (b) $(a \vee b) \leftrightarrow (a \wedge b)$, (c) $a \to (a \to b)$.

2. Który z podanych schematów (przesłanki | wniosek) jest poprawną regułą wnioskowania?

   (a) $(p \vee q)|(p \wedge q)$, (b) $p|(p \vee q)$, (c) $p|(p \wedge q)$.

3. Jaka jest moc zbioru A wszystkich liczb rzeczywistych spełniających funkcję zdaniową $(\exists x)(x^2+y^2 = 1)$

   (a) Zbiór A jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. (b) Zbiór A jest skończony. (c) Moc zbioru A jest równa continuum.

4. Ile jest liczb, które w zapisie binarnym mają 10 cyfr i cyfra 1 występuje dokładnie 7 razy?

   (a) N(9,6), (b) 7*N(9,6), (c) N(7,3).

5. Niech X będzie skończonym zbiorem, który ma dokładnie 35 podzbiorów trzyelementowych. Ile podzbiorów pięcioelementowych ma ten zbiór?

   (a) 21, (b) 35, (c) 165.

6. Rozważmy grupę 100 studentów. 40 z nich zdało egzamin A, 50 z nich zdało egzamin B, 60 - zdało egzamin C. 37 studentów zdało zarówno egzamin A jak i B, egzaminy B i C zdało

   40 studentów, a egzaminy A i C zdało tylko 32 studentów. Wszystkie trzy egzaminy zdało 30 studentów. Ilu studentów nie zdało żadnego egzaminu?

   (a) 35, (b) 29, (c) 27.

7. Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji rosnących $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ dla k mniejszego lub równego n?

   (a) N(n, k), (b) n!/(n-k)!, (c) k!.

8. Wskaż zdania prawdziwe.

   (a) Wykresem funkcji zdaniowej w dziedzinie liczb rzeczywistych $(\exists z)(x^2 + z^2 = y)$ jest zbiór $\{(x, y) : x^2 < y \text{ lub } x^2 = y\}$.

   (b) Wykresem funkcji zdaniowej w dziedzinie liczb rzeczywistych $(\exists z)(x^2 + z^2 = y)$ jest parabola $y = x^2$.

   (c) Wykresem funkcji zdaniowej w dziedzinie liczb rzeczywistych $(\exists z)(x^2 + z = y)$ jest zbiór par liczb rzeczywistych.

9. Wskaż zdania prawdziwe (notacja asymptotyczna).

   (a) $n + 2 = \mathcal{O}(\sqrt{n} \cdot \log(n))$, (b) $\log(n^n) = \Omega(\log(2^n))$,
   (c) Jeśli $f(n) = (2n^n) + (n^5 + 3n^2 + 7)$ i $g(n) = 4n + n!$, to $f = \mathcal{O}(g)$.

10. Wskaż zdania prawdziwe (własności relacji).

    (a) Niech $r \subset R \times R$, n r m wttw $|n-m| < 3$. Wówczas r jest relacją antysymetryczną lub zwrotną.
    (b) Niech $r \subset Z \times Z$, a r b wttw $a|b$. Wówczas r jest relacją zwrotną.
    (c) Niech $r \subseteq N^+ \times N^+$, a r b wttw $a|b$. Wówczas r jest relacją spójną.

11. Wskaż zdania prawdziwe.

    (a) Jeśli $A = \{x, y, z\}$, $B = \{x, z\}$, to $A \cap B = \{x, y, z\}$.

    (b) Jeśli $A = \{x, y, z\}$, $B = \{x, z\}$, to $A \backslash B$ jest podzbiorem B.

    (c) Jeśli $A = \{p, q, r\}$, $B = \{p, r\}$, to $A \backslash B$ jest podzbiorem A.

12. Które z wymienionych własności iloczynu kartezjańskiego zbiorów są prawdziwe dla dowolnych zbiorów X, Y, A, B?

    (a) $X \times (A \cup B) = (X \times A) \cup (X \times B)$, (b) $X \times Y = Y \times X$, (c) $X \times (A \backslash B) = (X \backslash A) \times (X \backslash B)$.

13. Niech G będzie danym grafem prostym o n wierzchołkach i m krawędziach. Która z własności jest prawdziwa?

    (a) Jeśli $n = m$, to G jest spójny. (b) Jeśli $m > n$, to graf G ma cykl. (c) Jeśli G jest grafem pełnym, to $m = n^2$.

14. Która z własności jest prawdziwa?

    (a) Jeśli G jest grafem zorientowanym, to relacja sąsiedztwa jest symetryczna.

    (b) Jeśli G jest niezorientowanym grafem spójnym, to dla dowolnych dwóch wierzchołków istnieje łącząca je droga.

    (c) Jeśli G jest grafem zorientowanym, to istnieje co najmniej jedna droga między dowolnymi wierzchołkami.

15. Niech A_i będzie nieskończoną rodziną zbiorów $A_i = \{x : x < -i$ oraz x jest liczbą całkowitą $\}$ dla $i = 0, 1, 2...$, oraz niech A oznacza przecięcie uogólnione zbiorów tej rodziny.

    (a) A jest zbiorem pustym. (b) $A = \{-1\}$. (c) $A = Z \backslash N$.

16. W zbiorze wszystkich funkcji $f : N \to R^+$ określamy relację równoważności następująco: f r g wttw $f = \Theta(g)$, tzn. rzędy funkcji f i g są takie same. Które z wymienionych zdań są prawdziwe?

    (a) Funkcje n i n^2 należą do tej samej klasy abstrakcji tej relacji.

    (b) Relacja r ma nieskończenie wiele klas abstrakcji.

    (c) Wszystkie funkcje należące do klasy wyznaczonej przez funkcję $h(n) = n$ są funkcjami liniowymi.

17. Wskaż zdania prawdziwe.

    (a) Istnieją skończone zbiory uporządkowane, które nie mają elementów minimalnych.

    (b) Każdy skończony zbiór uporządkowany ma element minimalny i element maksymalny.

    (c)Każdy zbiór liniowo uporządkowany posiada element największy i najmniejszy.

18. Mamy dany algorytm Alg z argumentem n będącym liczbą całkowitą dodatnią większą od 80. Które z podanych wyrażeń są niezmiennikami poniższej pętli?

    $Alg(n) = \{p := 1,\ t := 2\ while\ t < n\ do\ \{\ t := t + 1,\ p := pt\}\}$.

    (a) $p < t$, (b) $pt > 0$, (c) $p = \frac{t!}{2!}$.

19. Wskaż wzór jawny ciągu $a(n)$ zdefiniowanego rekurencyjne: $a(0) = 2$, $a(1) = 4$, $a(n+2) = -3a(n+1) + 10a(n)$ dla n większego lub równego 0.

    (a) $a(n) = 2^{n+1}$, (b) $a(n) = 2^n$, (c) $a(n) = 2 \cdot 2^n + (-5)^n$.

20. Jeżeli liczba trzyelementowych kombinacji pewnego zbioru n elementowego jest sześć razy mniejsza od liczby trzyelementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru, to

    (a) n może być dowolną liczbą naturalną większą niż 2

    (b) n musi być równe 3,

    (c) n może być dowolną liczbą naturalną mniejszą niż 3.

Notacja: N(a,b) oznacza liczbę b-elementowych kombinacji ze zbioru a-elementowego
ODPOWIEDZI: 1ac 2b 3ac 4a 5a 6b 7a 8ac 9b 10a 11c 12a 13b 14b 15a 16b 17b 18bc 19a 20a

Imię i nazwisko:

Numer legitymacji studenckiej:

Data: **Numer grupy ćw:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji, wpisz $\emptyset$. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odpowiedź										
pytanie	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
odpowiedź										

1. Niech $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$. Wówczas
   (a) $\bigcup_{i=2}^{100}(A_i) = \{1, 2, \ldots, 100\}$,
   (b) $\bigcap_{i=2}^{100}(A_i) = \{1\}$,
   (c) $A_7 \backslash A_5 = \{1, 2, \ldots, 5\}$.
2. Rozważ relację $r = \{(A, B) : A \subset B\}$ zdefiniowaną w zbiorze $2^{\mathbb{Z}}$. Ta relacja jest
   (a) przeciwzwrotna, (b) symetryczna, (c) przechodnia.
3. Rozważ relację równoważności r zdefiniowaną w zbiorze $\mathbb{Z}$ taką, że $(x, y) \in r$ wttw $3|(x-y)$. Wówczas
   (a) $[2] \cup [-1] = \mathbb{Z}$, (b) $[3] \cup [5] = [-3]$, (c) $[1] = [-1]$.
4. Rozważ funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x^2}$. Wówczas f jest
   (a) bijekcją,
   (b) suriekcją,
   (c) iniekcją.
5. Rozważ relację $r = \{(x, y) : x|y\}$ zdefiniowaną w zbiorze $U = \{3, 9, 27, 81\}$. Wówczas
   (a) r jest relacją dobrego porządku w zbiorze U,
   (b) 81 jest elementem największym w U,
   (c) $\inf\{27, 9\} = 3$.
6. Formuła $(p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)$ jest
   (a) tautologią rachunku zdań, (b) spełnialna, (c) falsyfikowalna.
7. Formuła $\forall k \exists p\, (p + 1 = k)$ jest prawdziwa w zbiorze
   (a) $\mathbb{N}$, (b) $\mathbb{Z}$, (c) $\mathbb{R}^+$.
8. Niech r będzie relacją taką, że $r = \{(a, b) \in (\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+) : a|b\}$. Wówczas
   (a) r jest częściowym porządkiem w $\mathbb{Z}^+$,
   (b) r jest liniowym porządkiem w $\mathbb{Z}^+$,
   (c) r jest dobrym porządkiem w $\mathbb{Z}^+$.
9. W każdym częściowo uporządkowanym zbiorze skończonym istnieje
   (a) co najmniej jeden element maksymalny,
   (b) co najmniej jeden element minimalny,
   (c) element najmniejszy.

10. Które z podanych zbiorów są nieprzeliczalne?
    (a) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
    (b) zbiór wszystkich (skończonych i nieskończonych) ciągów binarnych,
    (c) każdy nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{R}$.
11. Niezorientowany, prosty i spójny graf, którego każdy wierzchołek jest stopnia 2 jest grafem
    (a) Eulera, ale nie Hamiltona,
    (b) Hamiltona, ale nie Eulera,
    (c) Eulera i Hamiltona jednocześnie.
12. Jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem acyklicznym o n wierzchołkach, to ma
    (a) więcej niż $n - 1$ krawędzi, (b) mniej niż $n - 1$ krawędzi, (c) dokładnie $n - 1$ krawędzi.
13. Rozwiązaniem rekurencji: $t(0) = 1$, $t(1) = 2$, $t(n + 2) = 3t(n + 1) - 2t(n)$ dla $n \geq 0$ jest
    (a) $t(n) = 2^{n+1} - 1$, (b) $t(n) = 3^n - 1$, (c) $t(n) = 2^n$.
14. Liczba bijekcji ze zbioru X do zbioru Y, gdzie $|X| = |Y| = k$, wynosi
    (a) $C_k^n \cdot n!$, (b) V_k^n, (c) $k!$.
15. Ile relacji przeciwzwrotnych można określić w zbiorze n-elementowym ?
    (a) $2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}$, (b) 2^{n^2-n}, (c) 2^{n^2-n}.
16. Grafem izomorficznym z grafem zorientowanym $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ jest graf
    (a) $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$,
    (b) $G = (V, E)$ with $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$,
    (c) $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.
17. Na ile sposobów można wybrać 2 różne liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$ tak, aby ich arytmetyczna suma była liczbą nieparzystą?
    (a) $(C_{50}^1)^2$, (b) $2 \cdot C_{50}^2$, (c) $C_{50}^1 \cdot C_{48}^1$.
18. 20 przyjaciół wybrało się do kina. O tej porze są grane równocześnie 4 filmy. Na ile sposobów mogą się podzielić, jeśli każda osoba ma obejrzeć dokładnie jeden film?
    (a) $S(20, 4) \cdot 4!$, (b) 20^4, (c) 4^{20}.
19. Iloma sposobami można ustawić 8 wież na szachownicy (8×8) tak, aby nie atakowały się wzajemnie (tzn. aby żadna z nich nie mogła bić innych)?
    (a) $64 \cdot 63 \cdot \cdots \cdot 58 \cdot 57$, (b) $8!$, (c) $\frac{64!}{8! \cdot 56!}$.
20. Wskaż poprawne zakończenie zdania: "Jeśli suma dziewięciu liczb naturalnych jest równa 101, to wśród nich ..."
    (a) jest pięć, których suma wynosi co najmniej 57.
    (b) są trzy, których suma wynosi co najmniej 60.
    (c) jest sześć, których suma wynosi co najmniej 71.

Notacja:
C_n^k (V_n^k) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) ze zbioru n-elementowego.
$\overline{V}_n^k$ - liczba k-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
$S(n, k)$ - liczba sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów.

Odpowiedzi:
1A 2AC 3- 4- 5AB 6AB 7B 8A 9AB 10AB 11C 12- 13C 14C 15BC 16- 17A 18C 19B 20A

Imię i nazwisko:

Numer legitymacji studenckiej: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odpowiedź										
pytanie	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
odpowiedź										

1. Wskaż zbiór, który jest wartością wyrażenia $(A \cup B) \setminus C$
   (a) A, gdy $B = C$, (b) $A \cup B$, gdy $C \cap A = \emptyset$ i $C \cap B = \emptyset$, (c) $\emptyset$, gdy $A = B = C$.
2. Rozważamy relację binarną r w zbiorze liczb rzeczywistych. Której z podanych definicji relacji r przysługują wymienione obok własności?
   (a) $(x, y) \in r$ wttw $2x - 2y > 0$; antysymetria i przechodniość,
   (b) $(x, y) \in r$ wttw $x = y^2$; symetria,
   (c) $(x, y) \in r$ wttw $x + y > 0$; zwrotność i symetria.
3. Niech r będzie relacją porządku określoną w zbiorze liczb naturalnych dodatnich następująco: $x\ r\ y$ wttw x jest dzielnikiem y. Które z wymienionych zdań są prawdziwe?
   (a) Kresem górnym zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ jest liczba 60.
   (b) Kresem dolnym zbioru złożonego z wszystkich potęg 2 jest liczba 1.
   (c) Kresem górnym zbioru $\{2k : 0 \leq k < 16\}$ jest liczba 31.
4. Wskaż relacje r, które są relacjami równoważności.
   (a) r jest relacją binarną w zbiorze $\{a, b, c\}$ taką, że $r = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$.
   (b) r jest relacją binarną w zbiorze $\{a, b, c, d\}$ taką, że $r = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.
   (c) r jest relacją w zbiorze ludzi X taką, że $(a, b) \in r$ wttw, gdy a i b mają wspólnego rodzica.
5. Czy rozumowanie "Jeżeli liczba naturalna x dzieli się przez 3, to jeżeli x nie dzieli się przez 3, to dzieli się przez 5." jest oparte na niezawodnej regule wnioskowania rachunku zdań?
   (a) TAK, (b) NIE, (c) nie można tego jednoznacznie ustalić.
6. Załóżmy, że zdanie $\neg(a \to b)$ jest prawdziwe. Które z poniższych zdań są wówczas **fałszywe**?
   (a) $a \wedge b$, (b) $\neg a \vee b$, (c) $(a \to a) \to b$.
7. Wskaż formułę prawdziwą w zbiorze liczb naturalnych ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$).
   (a) $\forall x \forall y (x < y \to (\exists z (x + z < y)))$, (b) $\forall x \forall y (x < y \to (\exists z (x + z = y)))$,
   (c) $\forall x \forall y (x < y \to (\exists z (x + z > y)))$,
8. Które z wymienionych par zbiorów są równoliczne?
   (a) Dowolny nieskończony podzbiór zbioru liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych.
   (b) Zbiór liczb wymiernych z przedziału [1,100] i zbiór liczb niewymiernych z przedziału [0,1].
   (c) Zbiór X i zbiór potęgowy $P(X)$ dla dowolnego X.
9. Która z wymienionych relacji binarnych, określonych w zbiorze liczb rzeczywistych, jest funkcją?
   (a) $(x, y) \in r$ iff $x = y^2$, (b) $(x, y) \in r$ iff $x^2 = y^2$, (c) $(x, y) \in r$ iff $x^2 = y^3$.

10. Wskaż poprawne oszacowania.

    (a) $\frac{2n^3+2n^2-1}{n^2+1} = \Theta(n^3+1)$, (b) $\sqrt{n} \cdot log(n)^n = \Omega(\sqrt{n})$, (c) $2^n \cdot log(n) + n = O(n^n + log(n))$.

11. Niech dostępny zbiór znaków zawiera 26 liter, 10 cyfr i 15 innych symboli. Załóżmy, że nazwa pliku może się składać co najwyżej z 8 i co najmniej z 6 znaków, i trzyznakowego rozszerzenia złożonego z różnych liter. Ile różnych nazw plików można utworzyć zgodnie z podanymi zasadami?

    (a) $\binom{51}{6} \cdot \binom{51}{7} \cdot \binom{51}{8} \cdot \binom{26}{3} \cdot 3!$, (b) $(51^6 + 51^7 + 51^8) \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24$,

    (c) $(51^6 + 51^7 + 51^8) \cdot 3^{26}$.

12. W grupie 20 osób, 13 zdało ASD, 9 zdało MAD i 10 zdało TAK. Każdy zdał chociaż jeden egzamin. Dla każdej pary przedmiotów są 4 osoby, które je zaliczyły. Ile osób zdało wszystkie trzy egzaminy?

    (a) jedna, (b) dwie, (c) żadna.

13. Jaka jest liczba potrzebnych połączeń lotniczych, jeżeli 15 miast ma mieć bezpośrednie połączenie?

    (a) 105, (b) $\binom{15}{2}$, (c) 2^{15}.

14. Rozważmy algorytm $\{s := 0; k := 1;$ while $k \leq n$ do $s := s + k^2;\ k := k + 1$ od$\}$. Która z wymienionych formuł jest niezmiennikiem pętli w tym algorytmie?

    (a) $s = \sum_{i=1}^{k}(i-1)^2$, (b) $s = \sum_{i=1}^{k} i^2$, (c) $s = \sum_{i=1}^{k}(i + k^2)$.

15. Rozwiązaniem którego z równań rekurencyjnych jest funkcja $T(n) = 2^n$?

    (a) $T(1) = 2$, $T(n) = 2T(n-1)$ dla wszystkich $n > 1$,

    (b) $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(i+1) = T(i) + 2T(i-1)$ dla wszystkich $i > 1$,

    (c) $T(1) = 1$, $T(n) = T(n-1) + 1$ dla wszystkich $n > 1$.

16. Czy istnieje niezorientowany graf prosty $G =< V, E >$ spełniający podaną własność?

    (a) G ma k wierzchołków i k^2 krawędzi, dla $k \geq 2$. (b) G ma 4 wierzchołki i 6 krawędzi.

    (c) G ma 4 wierzchołki, w tym 2 wierzchołki stopnia 4 i 2 wierzchołki stopnia 5.

17. Grafem izomorficznym z grafem zorientowanym $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (4, 6)\}$ jest graf

    (a) $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (5, 1), (5, 2)\}$,

    (b) $G = (V, E)$ with $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 1), (5, 2)\}$,

    (c) $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (5, 1)\}$.

18. Rozkładamy 10 piłek w 5 pudełkach. Zgodnie z Zasadą Szufladkową Dirichleta

    (a) istnieje pudełko, w którym są dokładnie 2 piłki, (b) żadne pudełko nie jest puste,

    (c) istnieje pudełko, w którym są co najmniej 2 piłki.

19. 20 przyjaciół wybrało się do kina. O tej porze są grane równocześnie 4 filmy. Na ile sposobów mogą się podzielić, jeśli każdy film musi obejrzeć co najmniej jedna osoba z tej grupy?

    (a) $S(20, 4) \cdot 4!$, (b) 20^4, (c) 4^{20}.

20. Poniżej przedstawiono dane dotyczące wysokości, w metrach nad poziomem morza, trzech wybranych szczytów górskich: Makalu - 8464, Annapurna - 8091, Lhotse - 8516. Niech zmienna X przyjmuje wartości wysokości tych szczytów. Wówczas:

    (a) $E(X) > 8200$, (b) $E(X) < 8100$, (c) Średnia wysokość szczytów wynosi 8521.

Notacja:
C_n^k (V_n^k) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego.
$\overline{C}_n^k(\overline{V}_n^k)$ - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
$S(n, k)$ - liczba Stirlinga II rodzaju wyznaczająca liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów.

ODPOWIEDZI: 1bc 2a 3ab 4ab 5a 6abc 7abc 8a 9c 10bc 11b 12c 13ab 14a 15ab 16b 17a 18c 19a 20a

Imię i nazwisko:

Numer legitymacji studenckiej: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
odpowiedź										
pytanie	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
odpowiedź										

1. Wskaż zbiór, który jest wartością wyrażenia $(A \cup B) \setminus C$

   (a) A, gdy $B = C$, (b) C, gdy $A \cup B$ jest zbiorem pustym,

   (c) $\mathbb{N}$, gdy $A = B$ oraz A jest zbiorem liczb rzeczywistych, a C jest zbiorem liczb wymiernych.

2. Rozważamy relację binarną r w zbiorze liczb rzeczywistych. Której z podanych definicji relacji r przysługują wymienione obok własności?

   (a) $(x, y) \in r$ wttw $|x| = |y|$; antysymetria i przechodniość,

   (b) $(x, y) \in r$ wttw $x^2 = y$; przeciwzwrotność,

   (c) $(x, y) \in r$ wttw $|x - y| < 1$; zwrotność i symetria.

3. Niech r będzie relacją porządku określoną w zbiorze liczb naturalnych dodatnich następująco: x r y wttw x jest dzielnikiem y. Które z wymienionych zdań są prawdziwe?

   (a) Kresem górnym zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ jest liczba 60.

   (b) Każdy skończony podzbiór zbioru liczb naturalnych ma w sensie relacji r kres górny.

   (c) Ograniczeniami dolnymi zbioru $\{6, 9, 27\}$ są liczby 1,3.

4. Wskaż relacje r, które są relacjami równoważności.

   (a) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$, x r y wttw, gdy $x^2 \leq y^2$.

   (b) Dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{N}$, x r y wttw, gdy $5|(x + y)$.

   (c) Niech X będzie zbiorem ludzi i r relacją w X taką, że dla dowolnych a, b, $(a, b) \in r$ wttw, gdy a i b mają wspólną córkę.

5. Czy rozumowanie “Jeżeli relacja jest przechodnia, to z tego że jest zwrotna, wynika że jest przechodnia i zwrotna.” jest oparte na niezawodnej regule wnioskowania rachunku zdań?

   (a) NIE, (b) TAK, (c) nie można tego jednoznacznie ustalić.

6. Załóżmy, że zdanie $\neg(a \to b)$ jest prawdziwe. Które z poniższych zdań są wówczas **fałszywe**?

   (a) $a \vee b$, (b) $(a \to b) \vee (b \to a)$, (c) $b \to a$.

7. Wskaż formułę prawdziwą w zbiorze liczb naturalnych dodatnich.

   (a) $\forall x \forall y (x < y \to (\exists z (x + z < y)))$, (b) $\forall x \forall y (x < y \to (\exists z (x + z = y)))$,

   (c) $\forall x \forall y (x < y \to (\exists z (x + z > y)))$,

8. Które z podanych zbiorów są równoliczne?

   (a) Dowolne dwa nieskończone podzbiory zbioru liczb rzeczywistych.

   (b) Zbiór wszystkich liczb całkowitych i zbiór wszystkich liczb naturalnych.

   (c) Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału [0,1] i zbiór wszystkich liczb niewymiernych z przedziału [0,2].

9. Która z wymienionych funkcji jest różnowartościowa?

   (a) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taka, że $g(x) = x \bmod 5$ dla dowolnej liczby całkowitej x.

   (b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego x naturalnego $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

   (c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $h(x) = max(\{x, 4\})$.

10. Wskaż poprawne oszacowania.

    (a) $\frac{n^3+2n^2-1}{n+1} = \Theta(n^2+1)$, (b) $\sqrt{n} + log(n)^n = \Omega(\sqrt{n})$, (c) $n! = O(n^n + log(n))$.

11. Poniżej przedstawiono dane dotyczące wysokości, w metrach nad poziomem morza, trzech wybranych szczytów górskich: Makalu - 8464, Annapurna - 8091, Lhotse - 8516. Niech zmienna X przyjmuje wartości wysokości tych szczytów. Wówczas:

    (a) Średnia wysokość wymienionych szczytów wynosi 8521 metrów nad poziomem morza,

    (b) $E(X) < 3500$, (c) $E(X) > 8200$.

12. Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Liczba funkcji $f : A \to A$, których zbiór wartości jest dwuelementowy wynosi:

    (a) $C_5^2 \cdot S(5, 2) \cdot 2!$, (b) $C_5^2 \cdot 5!$, (c) $C_5^2 \cdot 2^5$.

13. Ile relacji równoważności można określić w zbiorze trzyelementowym?

    (a) $S(3, 2)$, (b) $S(3, 1) + S(3, 2) + S(3, 3)$, (c) 5.

14. Do sesji egzaminacyjnej przystąpiło 100 studentów. 40 z nich zdało egzamin z MAD, 50 zdało egzamin z TAK, a 60 zdało PJ. Ponadto wiadomo, że MAD i TAK zdało 30 studentów, TAK i PJ zdało 40, a PJ i MAD tylko 30 studentów. Wszystkie trzy egzaminy zaliczyło 20 studentów. Ilu studentów nie zaliczyło żadnego egzaminu?

    (a) 30, (b) 20, (c) 15.

15. Które z poniższych warunków spełnia ciąg $S(n) = 3^n(1 - 2n)$?

    (a) $S(0) = 1$, $S(1) = -3$ oraz $S(n) = 6S(n-1) - 9S(n-2)$ dla $n > 1$,

    (b) $54S(1) = S(2) + S(3)$,

    (c) $S(0) = 1$, $S(1) = -3$ oraz $S(n) = -2S(n-1) + 3S(n-2)$ dla $n > 1$.

16. Rozważmy algorytm $\{suma := 0; i := 1;$ while $i \leq n$ do $suma := suma + (2i - 1); i := i + 1$ od$\}$. Która z wymienionych formuł jest niezmiennikiem pętli w tym algorytmie?

    (a) $i \leq n$, (b) $i \leq n + 1$, (c) $suma = (i - 1)^2$.

17. Czy istnieje niezorientowany graf prosty $G =< V, E >$ spełniający podaną własność?

    (a) G ma k wierzchołków i $\frac{k^2}{2}$ krawędzi, dla $k \geq 2$. (b) G ma 3 wierzchołki i 5 krawędzi.

    (c) G ma 6 wierzchołków, w tym 2 stopnia 4, 2 stopnia 5 i 3 stopnia 1.

18. Graf $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2)\}$

    (a) jest drzewem, (b) jest planarny, (c) jest dwudzielny.

19. Rozkładamy 20 piłek w 3 pudełkach. Zgodnie z Zasadą Szufladkową Dirichleta

    (a) istnieje pudełko, w którym jest co najmniej 7 piłek, (b) wszystkie pudełka zawierają po co najmniej 6 piłek, (c) istnieje pudełko, w którym jest nie więcej niż 7 piłek.

20. 20 przyjaciół ma pojechać na przyjęcie 3 autobusami. Każdy autobus może zabrać nie więcej niż 20 osób. Na ile sposobów przyjaciele mogą się rozdzielić jeśli żaden autobus nie może być pusty oraz autobusy są nieodróżnialne w tym sensie, że nie ważne kto, w którym jedzie, ale kto z kim.

    (a) $S(20, 3) \cdot 3!$, (b) $S(20, 3)$, (c) $\frac{20!}{3! \cdot 17!}$.

Notacja:
C_n^k (V_n^k) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego.
$\overline{C}_n^k(\overline{V}_n^k)$ - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
$S(n, k)$ - liczba Stirlinga II rodzaju wyznaczająca liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów.

ODPOWIEDZI: 1- 2c 3bc 4- 5b 6- 7bc 8bc 9b 10abc 11c 12a 13bc 14a 15ab 16bc 17- 18abc 19a lub ac 20b

Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odpowiedź										
pytanie	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
odpowiedź										

1. Wskaż poprawne własności iloczynu Kartezjańskiego. Dla dowolnych zbiorów X, Y,
   (a) jeśli $X \times Y = Y \times X$, to $X = \emptyset$ lub $Y = \emptyset$,
   (b) jeśli $|X| = n$ i $|Y| = k$ dla $n, k \in \mathbb{N}$, to $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$,
   (c) jeśli $X \neq Y$, to $|X \times Y| \neq |X|$.
2. Niech r będzie binarną relacją określoną w zbiorze liczb rzeczywistych. Której z podanych definicji relacji r przysługuje wymieniona obok własność?
   (a) $x\ r\ y$ iff $|x| = |y|$; antysymetryczność, (b) $x\ r\ y$ iff $|x - y| \leq 2$; przechodniość,
   (c) $x\ r\ y$ iff $x = 2y$; przeciwzwrotność.
3. Które z wymienionych formuł są tautologiami rachunku zdań?
   (a) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$, (b) $(p \to (q \wedge \neg q)) \to \neg p$, (c) $((p \to q) \to p) \leftrightarrow p$.
4. Wskaż formułę prawdziwą w strukturze liczb naturalnych.
   (a) $\forall_n \forall_k \exists_t (|n + k| = |t|)$, (b) $\forall_n \forall_k \exists_t (|n + t| = |k|)$, (c) $\forall_n \forall_k \exists_t (|n| = |k| + |t|)$.
5. Wskaż relację (relacje) liniowego porządku.
   (a) $r \subseteq \mathbb{Z}^2$, gdzie dla dowolnych x, y, $(x, y) \in r$ wttw $x \bmod 2 = y \bmod 2$.
   (b) $r \subseteq \mathbb{N}^2$, gdzie dla dowolnych x, y, $(x, y) \in r$ wttw $|x| \leq |y|$.
   (c) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, gdzie dla dowolnych x, y, $(x, y) \in r$ wttw $2^x - 2^y \geq 0$.
6. Wskaż poprawne oszacowania.
   (a) $n^n + \lg(n) + 1 = \Theta(\log n^n)$, (b) $(2^n + n) \cdot \log(n) = O(n!)$, (c) $(3^n + n^2) \cdot n = \Omega(n^2 \cdot 2^n)$.
7. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Ile klas abstrakcji ma relacja $r = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}$ i $(x \bmod k) = (y \bmod k)\}$.
   (a) 3 dla $k = 3$, (b) 4 dla $k = 4$, (c) 15 dla $k = 15$.
8. Wskaż, które z wymienionych relacji to relacje równoważności.
   (a) r jest relacją określoną na zbiorze ludzi taką, że $x\ r\ y$ wttw x i y mówią w tym samym języku (np. polskim, angielski, japońskim itp.),
   (b) r jest binarną relacją określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$ taką, że $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$,
   (c) r jest binarną relacją określoną na zbiorze $\mathbb{Z}$ taką, że $x\ r\ y$ wttw 2 dzieli $(x - y)$.
9. Które z wymienionych zbiorów A i B są równoliczne?
   (a) A jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$,
   (b) $A = \mathbb{R}$, $B = (-10, 10) \subseteq \mathbb{R}$, (c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}$.

10. Wskaż zbiory nieprzeliczalne.

    (a) Zbiór wszystkich ciągów binarnych. (b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$.

    (c) Zbiór potęgowy zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10^{100}\}$.

11. Ile jest różnych sposobów rozdzielenia 9 różnych prac między 3 pracowników tak, aby każdy pracownik dostał do wykonania tyle samo prac?

    (a) $\frac{9!}{3!3!3!}$, (b) $C_9^3 \cdot C_6^3$, (c) $S(9,3) \cdot 3!$.

12. Rozważmy algorytm Alg(m), m $\in \mathbb{Z}^+$ taki, że Alg(m)={z:=2; k:=1; while (k $\leq$ m) do k:=k+1; z:=z·k; od; }. Która z poniższych formuł jest niezmiennikiem pętli w tym algorytmie?

    (a) $z = 2 \cdot k!$, (b) $k = z!$, (c) $k < z$.

13. Grafem izomorficznym z grafem zorientowanym $G = (V, E)$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (5, 1), (6, 3)\}$ jest graf

    (a) $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 3), (2, 6), (2, 3), (4, 6), (5, 3), (5, 6)\}$,

    (b) $G = (V, E)$ with $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (5, 1), (5, 3)\}$,

    (c) $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 6), (2, 6), (2, 3), (4, 3), (5, 3), (5, 6)\}$.

14. Ile jest różnych bajtów zawierających dokładnie 2 jedynki? Bajt to słowo ośmiobitowe, czyli złożone z ośmiu cyfr 0 lub 1.

    (a) 2^8, (b) C_8^2, (c) V_8^2.

15. Na ile sposobów można rozmieścić n osób w m różnych pokojach tak, by żaden z pokoi nie pozostał pusty.

    (a) $S(n, m) \cdot m!$, (b) C_n^m, (c) V_n^m.

16. Na ile sposobów można usadzić n osób przy k nieodróżnialnych stolikach tak, by przy każdym ze stolików siedziała co najmniej jedna osoba?

    (a) $S(n, m) \cdot m!$, (b) C_n^m, (c) $S(n, m)$.

17. Stosując Zasadę Szufladkową Dirichleta można udowodnić, że wśród 5 liczb całkowitych dodatnich jest x takich, że ich suma dzieli się przez 3, jeśli

    (a) $x = 2$, (b) $x = 3$, (c) $x = 4$.

18. Wskaż ciąg, który jest rozwiązaniem następującego równania rekurencyjnego: $F(0) = 3$, $F(1) = 1$, $F(n + 2) = -F(n + 1) + 6F(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

    (a) $F(n) = 2^n + (-3)^n$, (b) $F(n) = 2^{n+1}$, (c) $F(n) = 2^{n+1} + (-3)^n$.

19. Wskaż prawdziwe własności?

    (a) Jeśli G jest grafem posiadającym k wierzchołków takim, że każdy wierzchołek jest incydentny z parzystą liczbą krawędzi, to G posiada cykl.

    (b) Jeśli G jest grafem nieskierowanym takim, że dla każdych dwóch wierzchołków istnieje co najmniej jedna ścieżka łącząca je, to G ma cykl.

    (c) Jeśli G jest grafem nieskierowanym i spójnym, to dla każdych dwóch wierzchołków istnieje ścieżka łącząca je.

20. Rzucono kostką do gry. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wyrzuconych oczek. Wskaż własności prawdziwe.

    (a) $E(X^2) = 20$, (b) $E(X) = 3,5$, (c) $E(X) = 3$.

Notacja:
C_n^k (V_n^k) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego.
$\overline{C}_n^k(\overline{V}_n^k)$ - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
$S(n, k)$ - liczba Stirlinga II rodzaju wyznaczająca liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów.

ODPOWIEDZI: 1b 2– 3bc 4a 5bc 6bc 7abc 8bc 9abc 10ab 11ab 12ac 13ac 14b 15a 16c 17b 18c 19ac 20b

Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odpowiedź										
pytanie	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
odpowiedź										

1. Stosując Zasadę Szufladkową Dirichleta można udowodnić, że w każdym zbiorze zawierającym 5 różnych liczb całkowitych $\{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$ istnieje podzbiór o sumie elementów podzielnej przez

   (a) 5, (b) 7, (c) 3.

2. Czterech gości pewnego przyjęcia położyło na stole 4 swoje kapelusze. Następnie każdej osobie losowo przydzielono jeden. Ile jest wyników takiego losowania, w którym żadna osoba nie otrzymała swojego kapelusza?

   (a) 9, (b) 15, (c) 24.

3. W loterii jest 30 losów, w tym 3 wygrywające. Losy wygrywające są równorzędne. 10 osób kupiło po 3 losy. Ile jest sposobów rozmieszczenia losów wygrywających?

   (a) C^3_{10}, (b) C^3_{30}, (c) C^3_{12}.

4. Ile jest czterocyfrowych kodów zbudowanych z różnych cyfr takich, że różnica cyfry największej i najmniejszej nie przekracza 3?

   (a) $5 \cdot C^4_6 \cdot 4!$, (b) $7 \cdot 4!$, (c) $6 \cdot 4!$.

5. Jaka jest najmniejsza liczba studentów zdających egzamin z Matematyki Dyskretnej zapewnająca, że co najmniej 6 osób otrzyma tę samę ocenę. Przyjmijmy, że są 4 możliwe oceny: 2,3,4,5.

   (a) 24, (b) 21, (c) 25.

6. Rzucono kostką do gry. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wyrzuconych oczek. Wskaż własności prawdziwe.

   (a) $E(X^2) = 20$, (b) $E(X) = 3,5$, (c) $E(X) = 3$.

7. Czy prawdą jest, że $A = B$, jeśli przyjmiemy, że A, B, C są zbiorami spełniającymi zależność

   (a) $A \cup C = B \cup C$? (b) $A \cap C = B \cap C$? (c) $A \cup C = B \cup C$ i $A \cap C = B \cap C$?

8. Różnica symetryczna zbiorów A i B, oznaczana $A \oplus B$, jest zbiorem zawierającym elementy należące do zbioru A lub zbioru B, ale nie należące do części wspólnej tych zbiorów. Jeśli A i B są podzbiorami pewnego uniwersum U, to

   (a) $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, (b) $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, (c) $A \oplus U = U \setminus A$.

9. Czasami zbiory częściowo uporządkowane są nazywane *posetami* (z ang. **p**artially **o**rdered **set**). Wskaż posety.

   (a) Zbiór liczb rzeczywsitych z relacją $\leq$.

   (b) Zbiór potęgowy pewnego zbioru X z relacją $\subseteq$.

   (c) Zbiór wierzchołków pewnego skierowanego acyklicznego grafu z relacją osiągalności (wierzchołek v_2 jest osiągalny z v_1, jeśli istnieje ścieżka z v_1 do v_2).

10. Istnieje zbiór częściowo uporządkowany, który

    (a) ma element minimalny, ale nie ma elementu maksymalnego.

    (b) ma element największy, ale nie ma elementu najmniejszego.

    (c) nie ma ani elementu największego, ani najmniejszego.

11. 4. Niech f będzie funkcją ze zbioru X do zbioru Y. Niech A i B będą podzbiorami zbioru X. Które własności są prawdziwe. ($f(A)$ jest obrazem zbioru A względem funkcji f).

    (a) $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$, (b) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$, (c) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

12. Wskaż poprawne oszacowania.

    (a) $n + \sqrt{n} + 2^n = \mathcal{O}(2^n \cdot lg(n))$, (b) $(n^5 + n) \cdot lg(n) = \mathcal{O}(lg(n^n))$,

    (c) $2^n + n^3 \cdot n! = \mathcal{O}(n^n + n^2 + lg(n))$.

13. Rozważmy relację r określoną na zbiorze ciagów binarnych długości co najmnej 3 taką, że $(x, y) \in r$ wttw x i y są ciągami, które zgadzają się na trzech pierwszych pozycjach. Ile klas abstrakcji ma ta relacja równoważności?

    (a) 3, (b) ∞, (c) 8.

14. Wskaż, które z wymienionych relacji to relacje równoważności.

    (a) r jest relacją zdefiniowaną w zbiorze ciągów polskich liter taką, że $(a, b) \in r$ wttw $l(a) = l(b)$, gdzie $l(x)$ jest długością ciągu x.

    (b) r jest relacją zdefiniowaną w zbiorze liczb rzeczywistych taką, że $(x, y) \in r$ wttw $|x - y| < 1$.

    (c) r jest relacją zdefiniowaną w zbiorze liczb rzeczywistych taką, że $(a, b) \in r$ wttw $a - b$ jest liczbą całkowitą.

15. Które z wymienionych zbiorów A i B są równoliczne?

    (a) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$. (b) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. (c) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \cup \mathbb{Z}$.

16. Wskaż zbiory przeliczalne.

    (a) Zbiór wszystkich skończonych ciągów ternarnych. (b) Zbiór potęgowy zbioru $\{-4, 0, 3, 2\}$.

    (c) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{Z}$.

17. Niech r będzie binarną relacją określoną w zbiorze liczb całkowitych. Której z podanych definicji relacji r przysługuje wymieniona obok własność?

    (a) $x\ r\ y$ wttw $(x+1)^2 = (y+1)^2$; przechodniość, (b) $x\ r\ y$ wttw $2^{|x|} = 2^{|y|}$; antysymetryczność,

    (c) $x\ r\ y$ wttw $2x - 2y > 0$; przeciwzwrotność.

18. Które z wymienionych formuł są tautologiami rachunku zdań?

    (a) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$, (b) $\neg(t \vee s) \to ((t \vee s) \to (\neg p \vee q))$, (c) $((p \wedge q) \to p) \to (\neg(p \wedge q))$.

19. Rozważmy zbiór potęgowy zbioru $\mathbb{N}$ z relacją inkluzji $\subseteq$. Wskaż prawdziwe własności.

    (a) Jeśli $A = \{1, 3, 5\}$ i $B = \{2, 3, 4, 6\}$, to $sup\{A, B\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

    (b) Jeśli $A = \{1, 2, 10\}$ i $B = \{1, 2, 4, 6, \}$, to $inf\{A, B\} = \{1\}$.

    (c) Jeśli $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8\}$, to $sup\{A, B\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

20. Wskaż prawdziwe własności?

    (a) Jeśli G jest grafem posiadającym k wierzchołków takim, że każdy wierzchołek jest incydentny z parzystą liczbą krawędzi, to G posiada cykl.

    (b) Jeśli G jest grafem nieskierowanym takim, że dla każdych dwóch wierzchołków istnieje co najmniej jedna ścieżka łącząca je, to G ma cykl.

    (c) Jeśli G jest grafem nieskierowanym i spójnym, to dla każdych dwóch wierzchołków istnieje ścieżka łącząca je.

- liczba k-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego.

ODPOWIEDZI: 1ac 2a 3c 4b 5b 6b 7c 8abc 9abc 10abc 11abc 12ac 13c 14ac 15ac 16a 17ac 18b 19a 20ac

Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
odpowiedź										
pytanie	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
odpowiedź										

1. Załóżmy, że zdanie a jest fałszywe. Wskaż zdania, które są prawdziwe dla każdego zdania b.
   (a) $(a \vee b) \leftrightarrow b$, (b) $(a \vee b) \leftrightarrow (a \wedge b)$, (c) $a \to (a \to b)$.
2. Który z podanych schematów (przesłanki | wniosek) jest poprawną regułą wnioskowania?
   (a) $(p \vee q)|(p \wedge q)$, (b) $p|(p \vee q)$, (c) $p|(p \wedge q)$.
3. Jaka jest moc zbioru A wszystkich liczb rzeczywistych spełniających funkcję zdaniową $(\exists x)(x^2+y^2 = 1)$
   (a) Zbiór A jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. (b) Zbiór A jest skończony. (c) Moc zbioru A jest równa continuum.
4. Ile jest liczb, które w zapisie binarnym mają 10 cyfr i cyfra 1 występuje dokładnie 7 razy?
   (a) N(9,6), (b) 7*N(9,6), (c) N(7,3).
5. Niech X będzie skończonym zbiorem, który ma dokładnie 35 podzbiorów trzyelementowych. Ile podzbiorów pięcioelementowych ma ten zbiór?
   (a) 21, (b) 35, (c) 165.
6. Rozważmy grupę 100 studentów. 40 z nich zdało egzamin A, 50 z nich zdało egzamin B, 60 - zdało egzamin C. 37 studentów zdało zarówno egzamin A jak i B, egzaminy B i C zdało

   40 studentów, a egzaminy A i C zdało tylko 32 studentów. Wszystkie trzy egzaminy zdało 30 studentów. Ilu studentów nie zdało żadnego egzaminu?
   (a) 35, (b) 29, (c) 27.
7. Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji rosnących $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ dla k mniejszego lub równego n?
   (a) N(n, k), (b) n!/(n-k)!, (c) k!.
8. Wskaż zdania prawdziwe.
   (a) Wykresem funkcji zdaniowej w dziedzinie liczb rzeczywistych $(\exists z)(x^2 + z^2 = y)$ jest zbiór $\{(x, y) : x^2 < y \text{ lub } x^2 = y\}$.
   (b) Wykresem funkcji zdaniowej w dziedzinie liczb rzeczywistych $(\exists z)(x^2 + z^2 = y)$ jest parabola $y = x^2$.
   (c) Wykresem funkcji zdaniowej w dziedzinie liczb rzeczywistych $(\exists z)(x^2 + z = y)$ jest zbiór par liczb rzeczywistych.
9. Wskaż zdania prawdziwe (notacja asymptotyczna).
   (a) $n + 2 = \mathcal{O}(\sqrt{n} \cdot \log(n))$, (b) $\log(n^n) = \Omega(\log(2^n))$,
   (c) Jeśli $f(n) = (2n^n) + (n^5 + 3n^2 + 7)$ i $g(n) = 4n + n!$, to $f = \mathcal{O}(g)$.

10. Wskaż zdania prawdziwe (własności relacji).

    (a) Niech $r \subset R \times R$, n r m wttw $|n-m| < 3$. Wówczas r jest relacją antysymetryczną lub zwrotną.
    (b) Niech $r \subset Z \times Z$, a r b wttw $a|b$. Wówczas r jest relacją zwrotną.
    (c) Niech $r \subseteq N^+ \times N^+$, a r b wttw $a|b$. Wówczas r jest relacją spójną.

11. Wskaż zdania prawdziwe.

    (a) Jeśli $A = \{x, y, z\}$, $B = \{x, z\}$, to $A \cap B = \{x, y, z\}$.

    (b) Jeśli $A = \{x, y, z\}$, $B = \{x, z\}$, to $A \backslash B$ jest podzbiorem B.

    (c) Jeśli $A = \{p, q, r\}$, $B = \{p, r\}$, to $A \backslash B$ jest podzbiorem A.

12. Które z wymienionych własności iloczynu kartezjańskiego zbiorów są prawdziwe dla dowolnych zbiorów X, Y, A, B?

    (a) $X \times (A \cup B) = (X \times A) \cup (X \times B)$, (b) $X \times Y = Y \times X$, (c) $X \times (A \backslash B) = (X \backslash A) \times (X \backslash B)$.

13. Niech G będzie danym grafem prostym o n wierzchołkach i m krawędziach. Która z własności jest prawdziwa?

    (a) Jeśli $n = m$, to G jest spójny. (b) Jeśli $m > n$, to graf G ma cykl. (c) Jeśli G jest grafem pełnym, to $m = n^2$.

14. Która z własności jest prawdziwa?

    (a) Jeśli G jest grafem zorientowanym, to relacja sąsiedztwa jest symetryczna.

    (b) Jeśli G jest niezorientowanym grafem spójnym, to dla dowolnych dwóch wierzchołków istnieje łącząca je droga.

    (c) Jeśli G jest grafem zorientowanym, to istnieje co najmniej jedna droga między dowolnymi wierzchołkami.

15. Niech A_i będzie nieskończoną rodziną zbiorów $A_i = \{x : x < -i$ oraz x jest liczbą całkowitą $\}$ dla $i = 0, 1, 2...$, oraz niech A oznacza przecięcie uogólnione zbiorów tej rodziny.

    (a) A jest zbiorem pustym. (b) $A = \{-1\}$. (c) $A = Z \backslash N$.

16. W zbiorze wszystkich funkcji $f : N \to R^+$ określamy relację równoważności następująco: f r g wttw $f = \Theta(g)$, tzn. rzędy funkcji f i g są takie same. Które z wymienionych zdań są prawdziwe?

    (a) Funkcje n i n^2 należą do tej samej klasy abstrakcji tej relacji.

    (b) Relacja r ma nieskończenie wiele klas abstrakcji.

    (c) Wszystkie funkcje należące do klasy wyznaczonej przez funkcję $h(n) = n$ są funkcjami liniowymi.

17. Wskaż zdania prawdziwe.

    (a) Istnieją skończone zbiory uporządkowane, które nie mają elementów minimalnych.

    (b) Każdy skończony zbiór uporządkowany ma element minimalny i element maksymalny.

    (c)Każdy zbiór liniowo uporządkowany posiada element największy i najmniejszy.

18. Mamy dany algorytm Alg z argumentem n będącym liczbą całkowitą dodatnią większą od 80. Które z podanych wyrażeń są niezmiennikami poniższej pętli?

    $Alg(n) = \{p := 1,\ t := 2\ while\ t < n\ do\ \{\ t := t + 1,\ p := pt\}\}$.

    (a) $p < t$, (b) $pt > 0$, (c) $p = \frac{t!}{2!}$.

19. Wskaż wzór jawny ciągu $a(n)$ zdefiniowanego rekurencyjne: $a(0) = 2$, $a(1) = 4$, $a(n+2) = -3a(n+1) + 10a(n)$ dla n większego lub równego 0.

    (a) $a(n) = 2^{n+1}$, (b) $a(n) = 2^n$, (c) $a(n) = 2 \cdot 2^n + (-5)^n$.

20. Jeżeli liczba trzyelementowych kombinacji pewnego zbioru n elementowego jest sześć razy mniejsza od liczby trzyelementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru, to

    (a) n może być dowolną liczbą naturalną większą niż 2

    (b) n musi być równe 3,

    (c) n może być dowolną liczbą naturalną mniejszą niż 3.

Notacja: N(a,b) oznacza liczbę b-elementowych kombinacji ze zbioru a-elementowego
ODPOWIEDZI: 1ac 2b 3ac 4a 5a 6b 7a 8ac 9b 10a 11c 12a 13b 14b 15a 16b 17b 18bc 19a 20a

Imię i nazwisko:

Numer studenta: **Data:**

To jest test wielokrotnego wyboru. W każdym pytaniu mogą być 0, 1, 2 lub 3 poprawne opcje. Zaznacz je w tabelce. Jeśli nie ma poprawnej opcji wpisz BRAK. Za każde zadanie możesz uzyskać 0 lub 1 punkt. Na wszystkie odpowiedzi masz 90 min. Powodzenia!

TABLICA ODPOWIEDZI

pytanie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
odpowiedź										
pytanie	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
odpowiedź										

1. Wskaż tautologie rachunku zdań.

   (a) $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$, (b) $\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$, (c) $((p \to q) \vee (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \vee r))$.

2. Niech predykat $K(x, y, t)$ wyraża, że osoba x kocha osobę y w czasie t. Formuła $\exists_y \forall_x \forall_t K(x, y, t)$ wyraża, że

   (a) Kiedyś każdy kocha każdego. (b) Każdy kocha kogoś kiedyś.

   (c) Ktoś nigdy nie jest kochany przez nikogo.

3. Relacja r jest zdefiniowana w zbiorze ciągów binarnych długości co najmniej 4, tak że $(x, y) \in r$ wttw ciągi x i y mają takie same 4 pierwsze pozycje. Ile klas abstrakcji ma ta relacja?

   (a) 8, (b) ∞, (c) 16.

4. Wskaż relacje równoważności.

   (a) r jest relacją określoną w zbiorze ciągów polskich liter, taką że $(a, b) \in r$ wttw $l(a) > l(b)$, gdzie $l(x)$ jest długością ciągu x.

   (b) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in r$ wttw $|x - y| < 8$. (c) $r \subseteq \mathbb{Z}^2$, $(a, b) \in r$ wttw $a - b$ jest podzielne przez 4.

5. Niech $r \subseteq \mathbb{Z}^2$. Wskaż relacje spełniające podany warunek.

   (a) $(x, y) \in r$ iff $x^2 = y^2$; antysymetryczność, (b) $(x, y) \in r$ iff $|x - y| > 10$; przechodniość,

   (c) $(x, y) \in r$ iff $|x| - |y| > 0$; przeciwzwrotność.

6. Stosując zasadę szufladkową Dirichleta można udowodnić, że jeśli z pierwszych 6 dodatnich liczb całkowitych wybierzemy k, to wśród nich musi istnieć para liczb, których suma wynosi 7, jeśli

   (a) $k = 3$, (b) $k = 4$, (c) $k = 5$.

7. Na ile sposobów można ułożyć 8 różnych, kolorowych kluczy na breloczku (czyli w kółko) tak by dwa klucze od domu (czerwony) i od piwnicy (niebieski) nie znajdowały się obok siebie.

   (a) $7!$, (b) $2 \cdot 5 \cdot 6!$, (c) $5 \cdot 6!$.

8. Załóżmy, że 30 studentów zebrało się by grać w piłkę nożną. Istnieje 5 małych, różnych boisk, gdzie studenci mogą poćwiczyć. Na ile różnych sposbów można przypisać studentów do boisk, tak by na każdym ktoś grał?

   (a) $S(30, 5)$, (b) $S(30, 5) \cdot 5!$, (c) $C^6_{30} \cdot C^6_{24} \cdot C^6_{18} \cdot C^6_{12} \cdot C^6_6$.

9. Załóżmy, że 10 studentów zebrało się by grać w piłkę nożną. Istnieją 4 małe, różne boiska, gdzie studenci mogą poćwiczyć. Studenci mają 8 identycznych piłek. Na ile sposbów można rozdzielić piłki, tak by na każdym boisku była co najmniej jedna?

   (a) $\overline{C}^4_4$, (b) $S(8, 4) \cdot 4!$, (c) C^7_4

10. Wskaż zbiory uporządkowane (tzn. zbiory ze zdefiniowaną w nich relacją porządku częściowego).

    (a) $A = \mathbb{Z}$, $r = \{(a,b) : b = a \cdot k \;\; dla \;\; k \in \mathbb{Z}\}$, (b) $A = \mathbb{Z}$, $r = \{(a,b) : |a| = |b|\}$

    (c) A jest zbiorem potęgowym pewnego zbioru, $r = \{(X,Y) : X \cup Y = Y\}$,

11. Ile pięciocyfrowych kodów można zbudować z różnych cyfr, tak aby różnica między największą i najmniejszą cyfrą nie była większa niż 4?

    (a) $C^5_{10} \cdot 5!$, (b) $7 \cdot 4!$, (c) $6 \cdot 5!$.

12. Istnieje częściowo uporządkowany zbiór, który

    (a) nie ma ani największego, ani maksymalnego elementu.
    (b) ma minimalny element, ale nie ma najmniejszego.
    (c) ma największy element, ale nie ma maksymalnego.

13. Które stwierdzenia są prawdziwe?

    (a) Jeśli G jest nieskierowanym, spójnym grafem, który ma n wierzchołków, to ma on co najmniej $n-1$ krawędzi.

    (b) Jeśli G jest skierowanym grafem, to każde dwa wierzchołki są połączone drogą.

    (c) Jeśli G jest nieskierowanym, acyklicznym grafem, który ma n wierzchołków, to G ma co najwyżej $n-1$ krawędzi.

14. Niech zbiór potegowy zbioru $\mathbb{N}$ będzie uporządkowany przez relację **zawierania** ($\subseteq$). Wskaż poprawne zależności.

    (a) Jeśli $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3,4,6\}$, $C = \{1\}$, to $sup\{A,B,C\} = \{2,3,4,6\}$.

    (b) Jeśli $A = \{1,2,10\}$, $B = \{1,2,4,6,\}$, $C = \{1,2\}$, to $inf\{A,B,C\} = \{1,2\}$.

    (c) Jeśli $A = \{1,2\}$ i $B = \{2,4\}$, to $sup\{A,B\} = \{2,4\}$.

15. Wskaż zbiory przeliczalne.

    (a) Zbiór wszystkich ciągów binarnych. (b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.

    (c) Zbiór potęgowy zbioru $\{-4,0,3,2\}$.

16. Wskaż poprawne zależności.

    (a) $7n^2 + \sqrt{n} = \mathcal{O}(n^2 \cdot lg(n))$, (b) $(n^5 + n) \cdot lg(n^n) = \mathcal{O}(n^6 + lg(n^n))$,

    (c) $2^n + n! = \mathcal{O}(n^n + n^2)$.

17. Niech $\Omega = \{@, \#, \$, \%\}$ będzie uniwersum oraz $A = \{@, \#\}$, $B = \{\#, \$, \%\}$. Wówczas

    (a) $(A \cup B)' = \emptyset$, (b) $(\Omega \cap B)' = \emptyset$, (c) $(\Omega \backslash B)' = B$.

18. Implikacja "Jeśli A jest podzbiorem B i B jest elementem C, to A jest elementem C" jest prawdziwa

    (a) dla dowolnych zbiorów A, B, C, (b) dla pewnych zbiorów A, B, C, (c) nigdy.

19. Ciąg $s(n) = 3^n - 2n3^n$ jest rozwiązaniem rekurencji

    (a) $s(0) = s(1) = 1$; $s(n) = 6s(n-1) - 9s(n-2)$ dla $n > 1$,
    (b) $s(0) = 1$, $s(1) = -3$; $s(n) = 6s(n-1) - s(n-2)$ dla $n > 1$,
    (c) $s(0) = 1$, $s(1) = -3$; $s(n) = 6s(n-1) - 9s(n-2)$ dla $n > 1$.

20. Nie pamiętasz jaki jest kod do czterocyfrowego zamka w Twojej walizce. Wiesz tylko, że nie użyłeś żadnej cyfry więcej niż raz. Ile (maksymalnie) różnych sposobów musisz wypróbować?

    (a) $4!$, (b) C^4_{10}, (c) 5040.

Oznaczenia:
C^k_n (V^k_n) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) ze zbioru n-elementowego.
$\overline{C}^k_n$ ($\overline{V}^k_n$) - liczba k-elementowych kombinacji (wariacji) z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
$S(n,k)$ - liczba sposobów podzielenia n obiektów na k niepuste podzbiory.

ODPOWIEDZI: 1abc 2- 3c 4c 5c 6bc 7c 8b 9ac 10c 11c 12ab 13ac 14b 15- 16ac 17ac 18b 19c 20c