ĆWICZENIA IX i X

(indukcja)

Zadania

1. Udowodnić, że:

   (a) $2n > n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^{+}$,

   (b) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   (c) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+\ldots+n)^2$

   (d) $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_0\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}$, gdzie $a_{i+1} = q \cdot a_i$.

2. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $T(n) = 2^n - 1$, gdzie

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 2T(n-1)+1 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}.$$

3. Niech $F(n)$ oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego zdefiniowanego rekurencyjnie następująco

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ F(n-1)+F(n-2) & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}.$$

   Udowodnić, że:

   (a) dla każdego $n > 0$, $F(3n)$ jest liczbą parzystą,

   (b) dla każdego $n > 0$, $F(4n)$ jest podzielne przez 3,

   (c) dla każdego $n > 0$, $F(n)^2 + F(n-1)^2 = F(2n-1)$,

   (d) dla każdego $n > 4$, $5|F(5n)$.

4. Udowodnić, że dla dowolnego $n > 0$:

   (a) $133|(11n+1+122n-1)$,

   (b) $7|(8n-1)$,

   (c) $8|\left(5^{n+1}+2\cdot 3^n+1\right)$.

5. Udowodnij, ze $(1+p)^n \geq 1+np$, dla n naturalnego i p rzeczywistego i $p \geq (-1)$.

6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ i dowolnych dodatnich wartości a i b zachodzi wzór $(a+b)^n \geq a^n + b^n$.

7. Udowodnij, że każda liczba naturalna $n \geq 2$ jest liczba pierwszą albo jest iloczynem liczb pierwszych.

8. Udowodnij, że każdy skończony, zorientowany graf, w którym dowolne dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią w jednym z dwóch możliwych kierunków posiada drogę Hamiltona.

9. Udowodnij, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie jest, by dla każdego zbioru k dziewcząt, wszystkie one łącznie znały co najmniej k chłopców, gdzie $1 \leq k \leq m$ oraz m jest liczbą wszystkich dziewcząt.

10. Dla podanej poniżej funkcji RUN podaj niezmiennik i ustal warunek końcowy WK.

```
int RUN(int n) {
  // WP = {n ∈ ℕ}
  int i:=0, s:=1;

  while (i < n) do
    i:=i+1;
    s:=s*i;
  od
  // WK = ...
  return s;
}
```

11. Dla podanej poniżej funkcji RUN podaj niezmiennik i ustal warunek końcowy WK.

```
int RUN(int a, int b) {
  // WP = {a ∈ ℕ, b ∈ ℕ}
  int s:=1, p:=a, w:=b;

  while (w > 0) do
    if (w mod 2 = 0) then
      p:=p*p;
      w:=w/2;
    else
      s:=s*p;
      w:=w-1;
    fi
  od
  // WK = ...
  return s;
}
```

12. Dla podanej poniżej funkcji RUN podaj niezmiennik i ustal warunek końcowy WK.

```
int RUN(int n) {
  // WP = {n ∈ ℕ \ {0}}
  int s:=1, i:=1, k:=1;

  while (i < 2n-1) do
    i:=i+2;
    s:=s+i;
    k:=k+1;
  od
  // WK = ...
  return s;
}
```

13. Dla podanej poniżej funkcji RUN podaj niezmiennik i ustal warunek końcowy WK.

```
int RUN(int a) {
  // WP = {a ∈ ℕ}
  int x:=0, y:=1, z:=1;

  while (z <= a) do
    x:=x+1;
    y:=y+2;
    z:=z+y;
  od
  // WK = ...
```

```
    return x;
  }
```

14. Dla podanej poniżej funkcji RUN podaj niezmiennik i ustal warunek końcowy WK.

```
real RUN(int x, int n, real A[]) {
  // WP = {n ∈ ℕ, x ∈ ℕ}
  int s:=a[n], i:=n;

  while (i > 0) do
    s:=s*x;
    s:=s+A[i-1];
    i:=i-1;
  od
  // WK = ...
  return s;
}
```

15. Dla podanej poniżej funkcji RUN podaj niezmiennik i ustal warunek końcowy WK.

```
bool RUN(int a) {
  // WP = {a ∈ ℕ, a > 1}
  int p:=1;
  bool test:=TRUE;

  while (p ≤ ⌊√a⌋) do
    p:=p+1;
    if (a mod p = 0) then
      test:=FALSE;
    fi
  od
  // WK = ...
  return test;
}
```