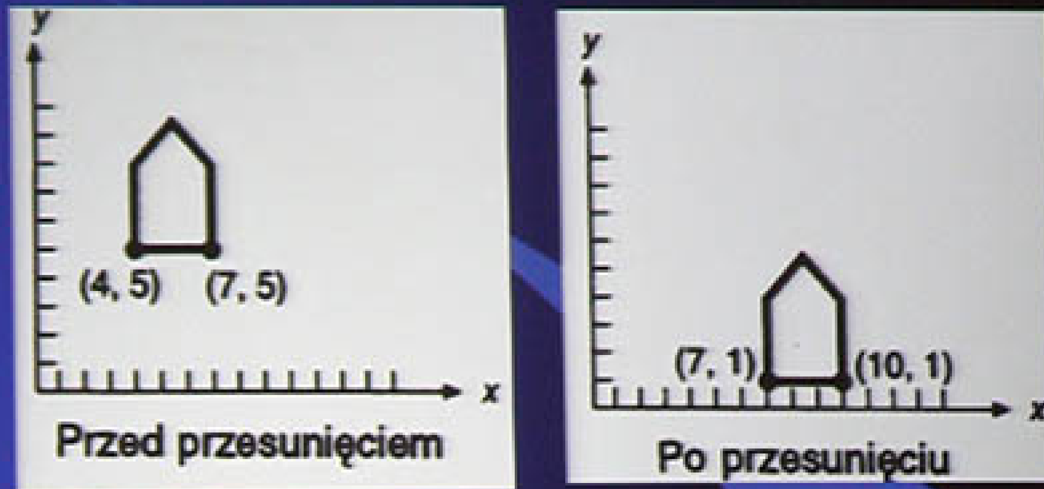
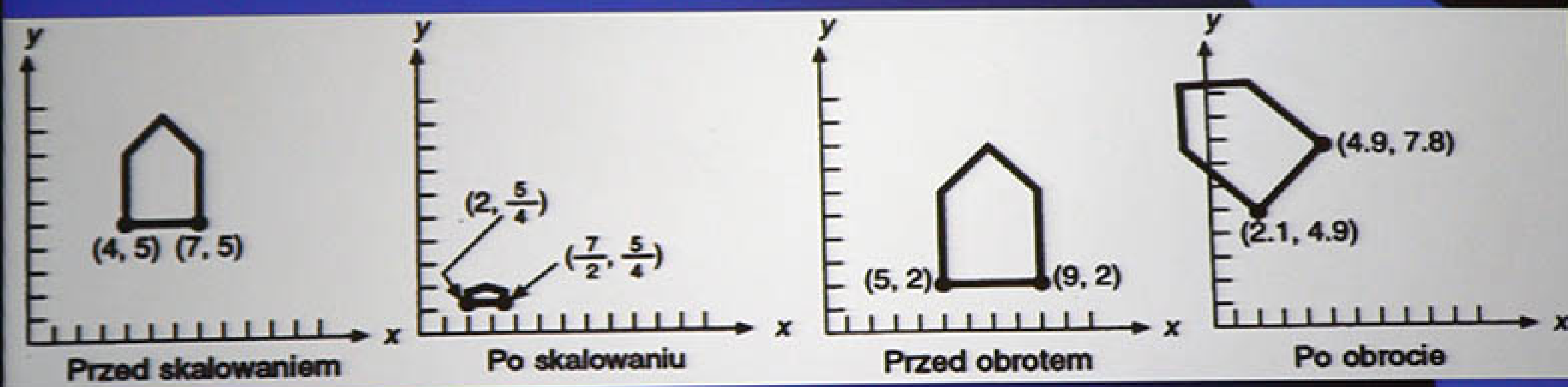

WHERE'S MY BITCHES ?
FUC
IN HELL
MICHAŁ
ŁUKASZ
KRZYSIEK TO DZIEWCZYNA!!

Przekształcenia geometryczne 2D

- Przesuwanie
- Skalowanie
- Obroty





Matematyka wektorów i macierzy

$$P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad P^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy

C = AB

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sj}$$

Mnożenie macierzy nie jest

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy

$C = AB$

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sj}$$

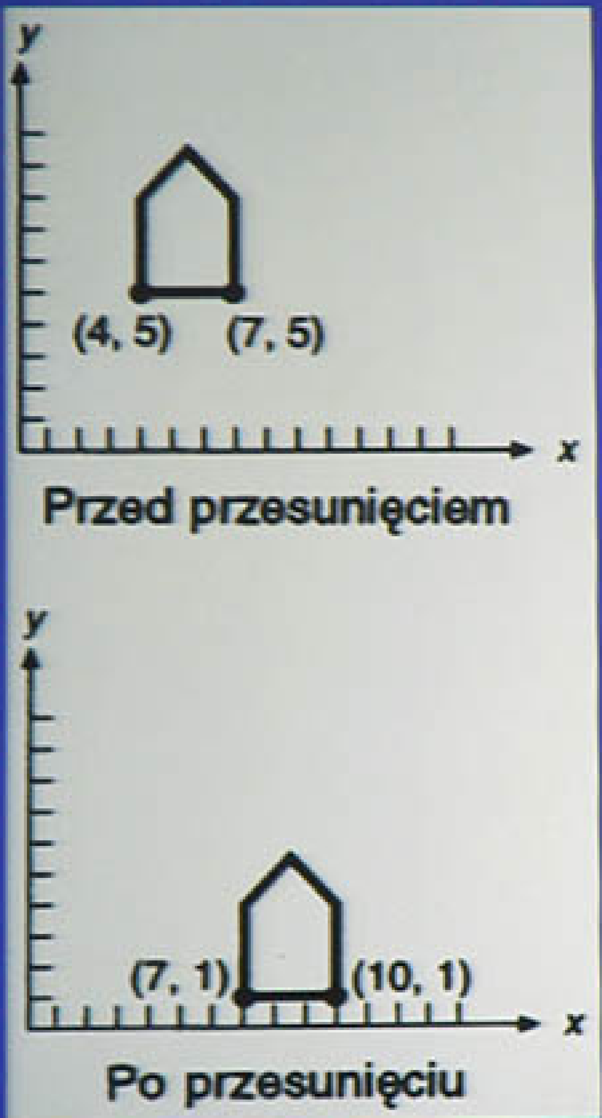
Mnożenie macierzy nie jest przemienne

$AB \neq BA$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Przesunięcie (translacja)



Przesunięcie o wektor (3,-4)

$x' = x + d_x, \; y' = y + d_y,$

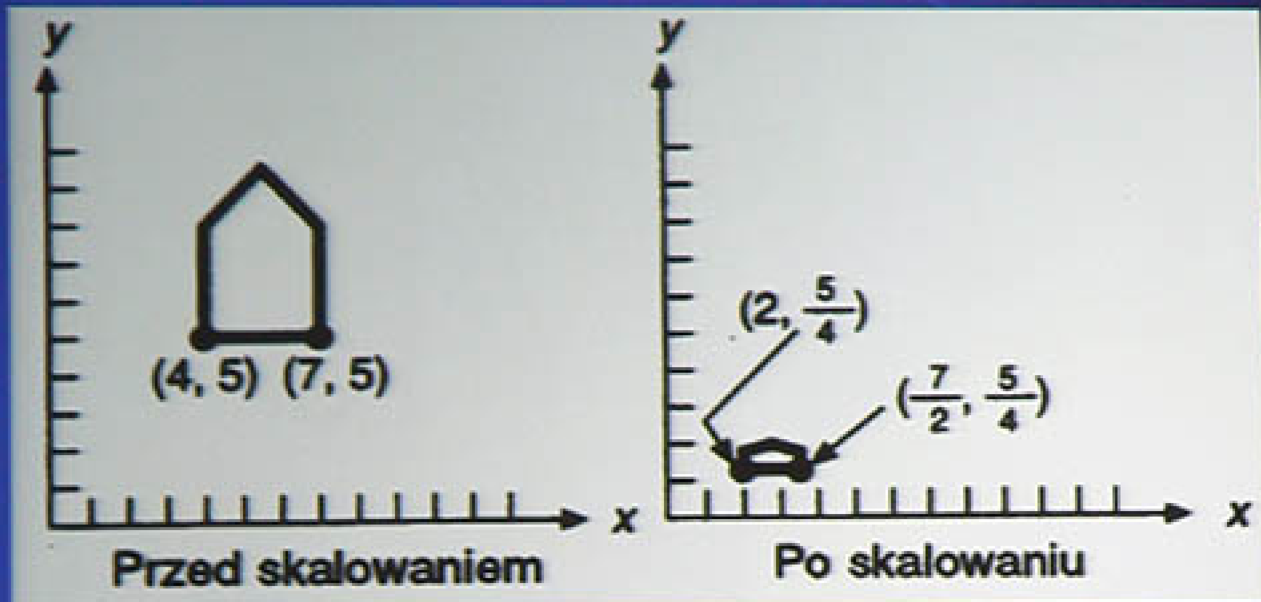
Definiując wektory kolumnowe, mamy:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Gdzie T jest wektorem translacji

$$P' = P + T$$

Skalowanie



Skalowanie ze współczynnikami sx = 1/2 i sy = 1/4

$x' = x \cdot s_x$

$y' = y \cdot s_y$

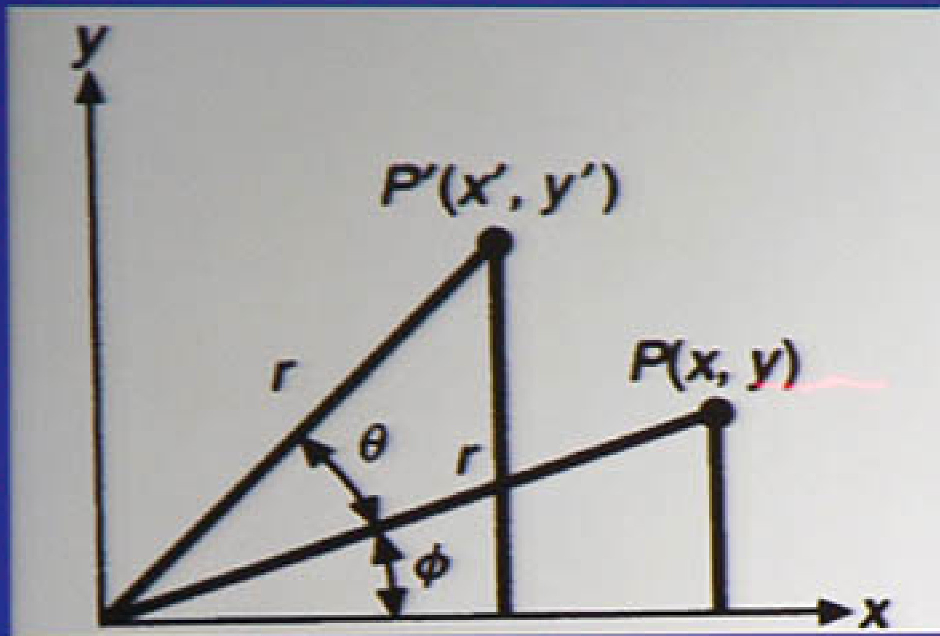
s_x, s_y współczynniki skali wzdłuż osi X i Y

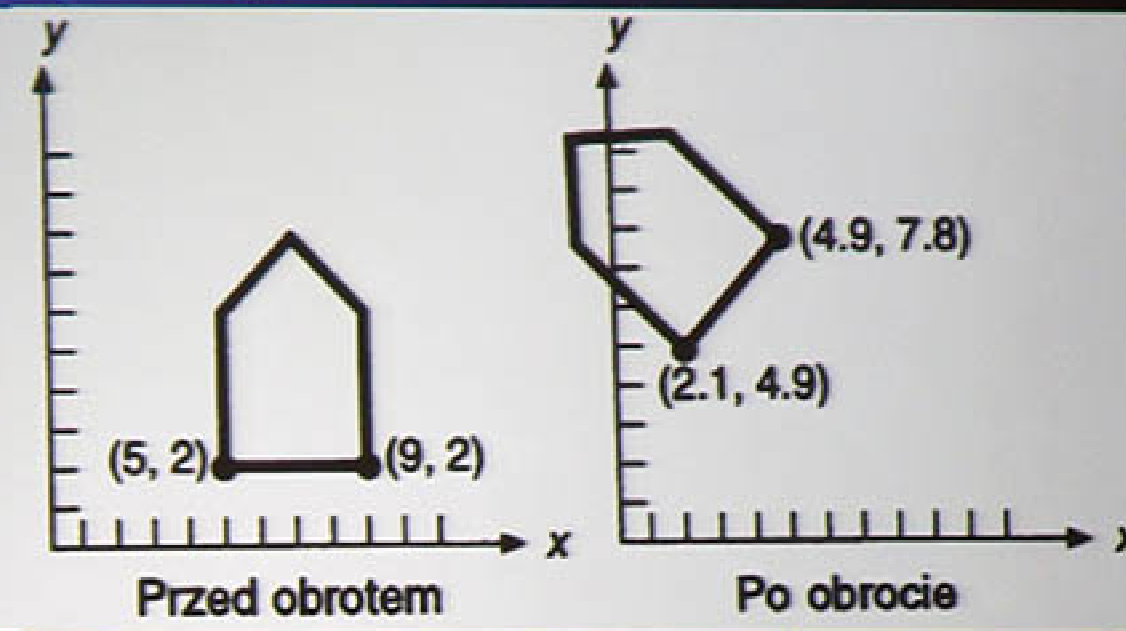
Definiując macierz przekształcenia, mamy :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = P \cdot S$$

Obroty





$x = r \cdot \cos\phi,\ y = r \cdot \sin\phi$

$x' = r \cdot \cos(\phi+\theta)$

$= \underline{r \cdot \cos\phi}\, \cos\theta - \underline{r \cdot \sin\phi}\, \sin\theta$

$= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$

$y' = r \cdot \sin(\phi+\theta)$

$= \underline{r \cdot \sin\phi}\, \cos\theta + \underline{r \cdot \cos\phi}\, \sin\theta$

$= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$

Definując macierz obrotu, mamy :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$P' = R \cdot P$

Podsumowanie

W kartezjańskim układzie współrzędnych

- Translacja (przesuwanie)

  P’ = T + P (dodawanie wektorów)

- Skalowanie

  P’ = S • P (mnożenie macierzy)

- Rotacja

  P’ = R • P (mnożenie macierzy)

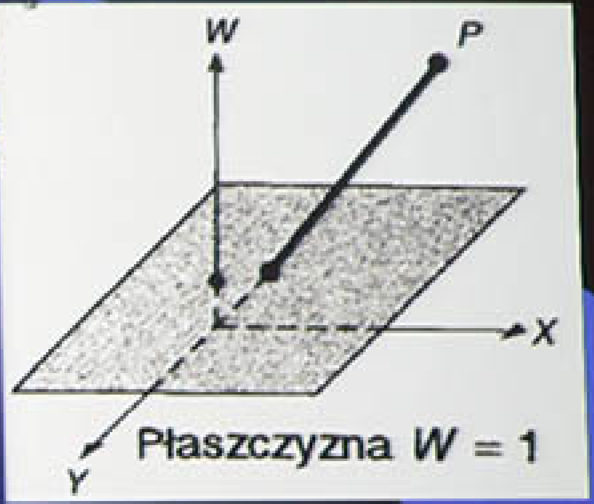
Poszukujemy układu współrzędnych w którym wszystkie operacje wykonywane będą jednolicie.

Współrzędne jednorodne

- Dodajemy trzecia współrzędną W
- Jeśli

  $P_1(x, y, W) = P_2(a \cdot x, a \cdot y, a \cdot W$

  to P_1 i P_2 reprezentują ten sam pun
- w <> 0
- P(x, y, W) = P(x/w, y/w, 1)



Współrzędne kartezjańskie punktu jednorodnego:

P (x, y, 1)

Macierze przekształceń we współrzędnych jednorodnyh - translacja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + d_x$$

$$y' = y + d_y$$

$$P' = T(d_x, d_y) = T \cdot P$$

Przykład

Punkt (x,y) przesuwamy od d_{x1}, d_{y1} uzyskując punkt P' a następnie ten punkt przesuwamy do P'' o d_{x2}, d_{y2}

$$\mathbf{P'} = T_1(\mathbf{d}_{x1}, \mathbf{d}_{y1}) \cdot \mathbf{P} = T_1 \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P''} = T_2(\mathbf{d}_{x2}, \mathbf{d}_{y2}) \cdot \mathbf{P'} = T_2 \cdot \mathbf{P'}$$

$$\mathbf{P''} = T_2 \cdot \mathbf{P'} = T_2 \cdot (T_1 \cdot \mathbf{P}) = T_2 \cdot T_1 \cdot \mathbf{P} = T_{21} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

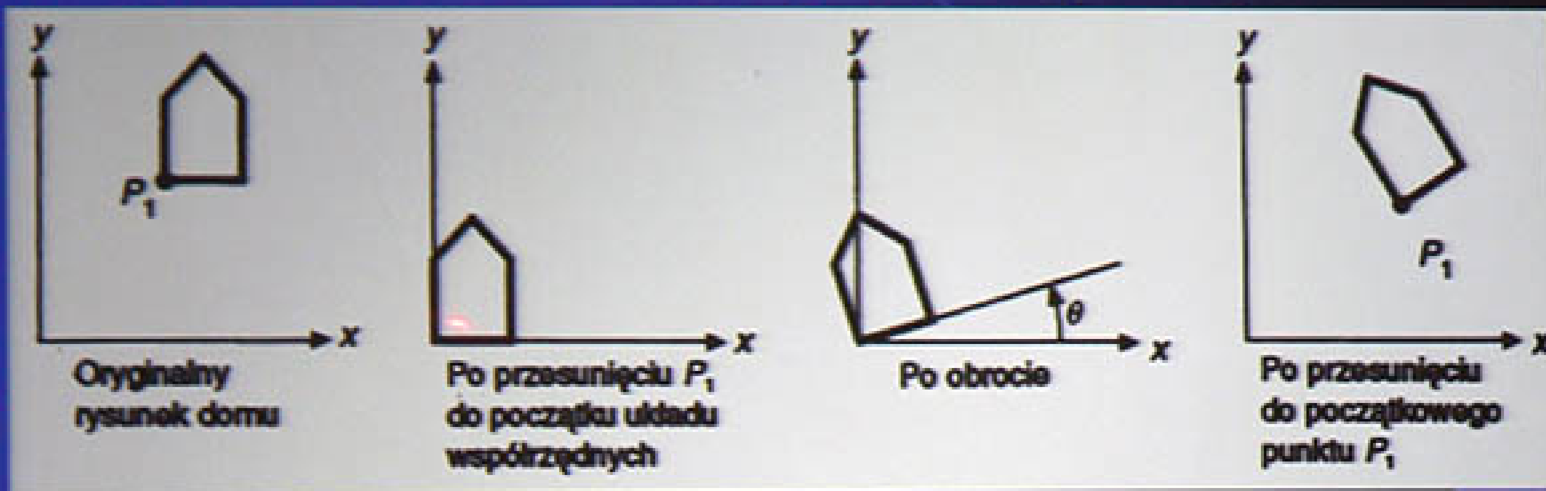
$$\mathrm{P'} = \mathrm{R}(\theta) \cdot \mathrm{P}$$

Przekształcenia pochylające

- *a, b są* współczynnikami proporcjonalności.

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obrót względem środka lokalnego układu współrzędnych



$$T(x_1, y_1)\cdot R(\theta)\cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

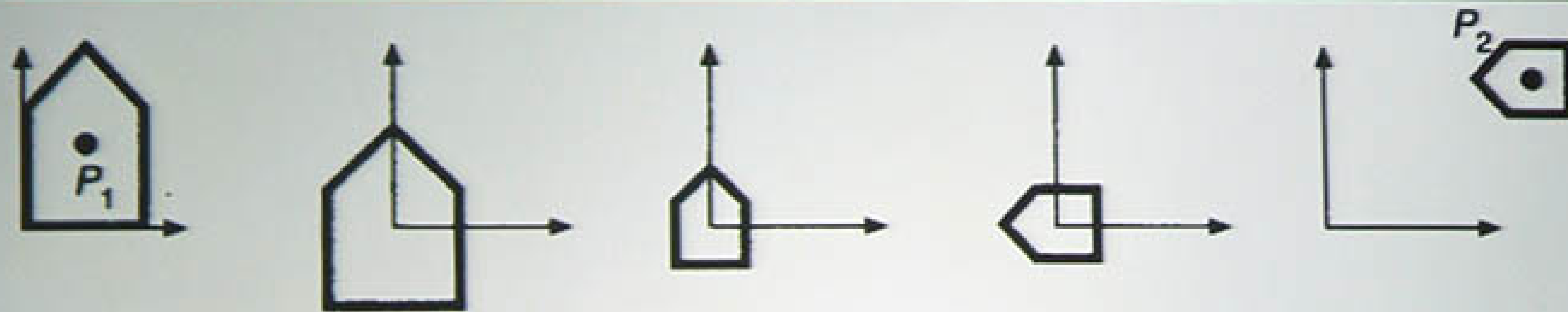
$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1(1-\cos\theta) + y_1\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta) - x_1\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skalowanie względem lokalnego układu współrzędnych

$$T(x_1, y_1) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Składanie przekształceń



$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)$$

Sekwencje przekształceń

Złożenie sekwencji macierzy translacji i obrotu daje *przekształcenia ciała sztywnego* zachowujące kąty i długości

Złożenie dowolnej sekwencji macierzy translacji, obrotu i skalowania daje *przekształcenia afiniczne* (zachowujące równoległość linii)

Złożenie operacji R, S i T daje ogólnie macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translacja i skalowanie (3D)

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T(d_x, d_y, d_z) \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \end{bmatrix} \qquad S(s_x, s_y, s_z) \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \bullet s_x \\ y \bullet s_y \\ z \bullet s_z \end{bmatrix}$$

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T(d_x, d_y, d_z) \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S(s_x, s_y, s_z) \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \bullet s_x \\ y \bullet s_y \\ z \bullet s_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

rosoft PowerPoint - [PJWSTK05_07-2D.ppt]

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

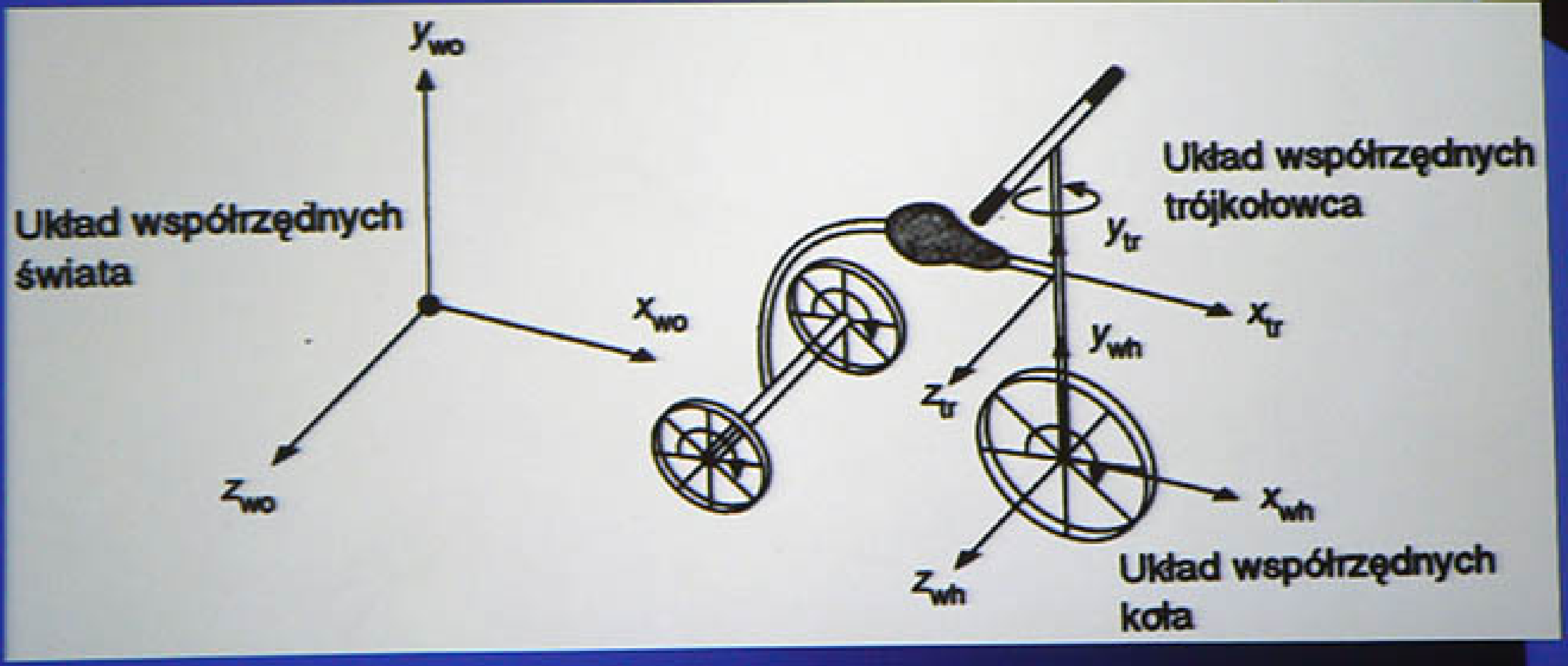
$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Przekształcenia układu współrzędnych

Układy współrzędnych
- Świata
- Obiektu
- Składowych obiektu
- Urządzenia wyświetlającego

Transformacje układu współrzędnych
- Przesuwanie
- Skalowanie
- Obrót



Rzutowanie

Rzutowanie to przekształcenia punktów z n-wymiarowej przestrzeni, do przestrzeni o wymiarze mniejszym niż n

- 3D → 2D
- Rzutowanie planarne
- Rzut równoległe
- Rzuty perspektywiczne