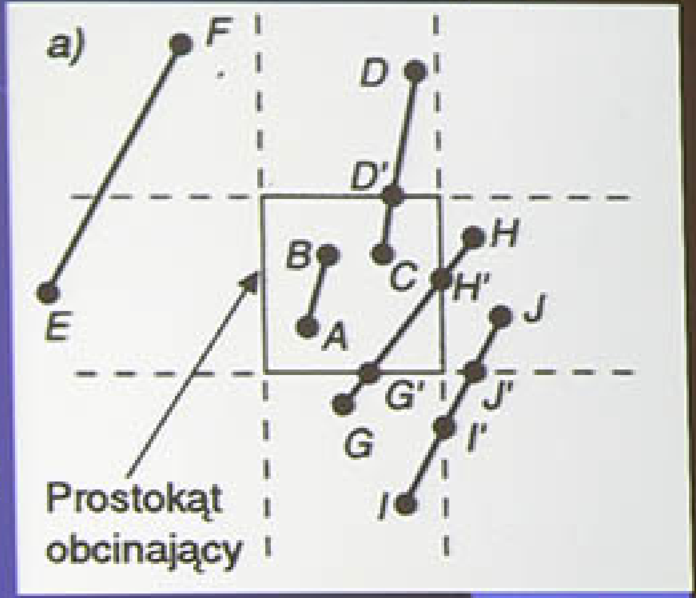
Algorytm Cohena-Sutherlanda (1)



Podstawowe kroki algorytmu

- Akceptacja odcinka (AB)
- Odrzucenie odcinka (EF)
- Podział odcinka krawędzią obcinającą na dwie części, tak aby jedną można było odrzucić (iteracyjne obcinanie odcinka)

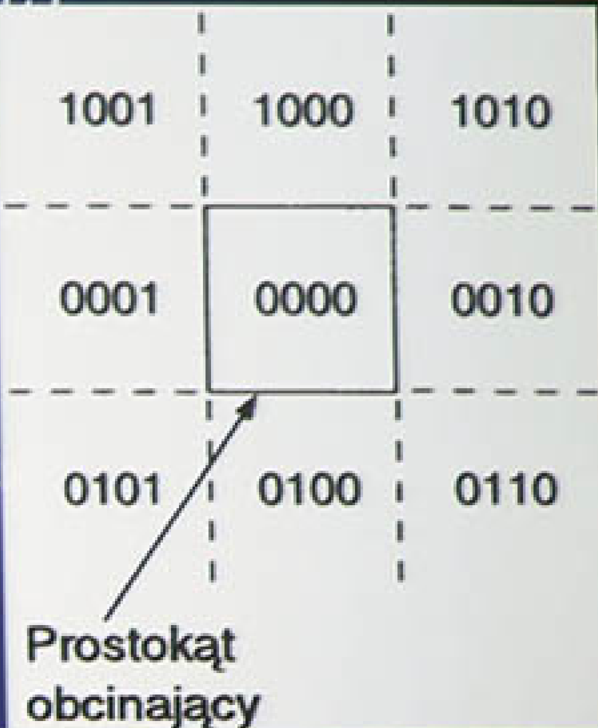
Algorytm bardzo efektywny gdy

- Duży prostokąt obcinający (obejmuje większość pola wyświetlania)
- Mały prostokąt obcinający

Algorytm Cohena-Sutherlanda (2)

Czterobitowe kody obszarów (b_1, b_2, b_3, b_4)

- b_1 : $y > y_{max}$
- b_2 : $y < y_{min}$
- b_3 : $x > x_{max}$
- b_4 : $x < x_{min}$



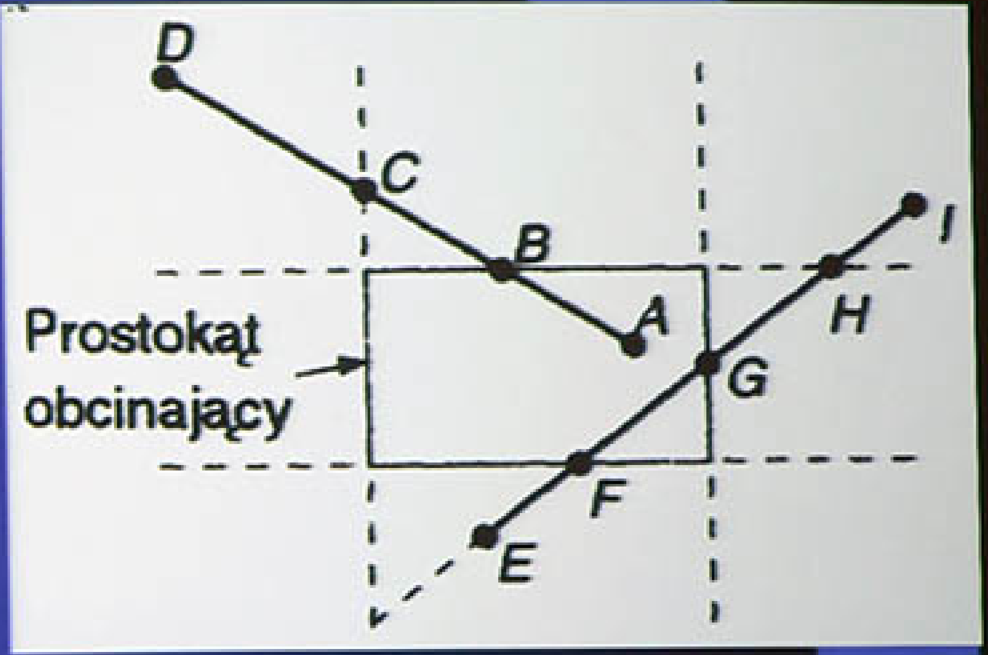
Analiza kodów początku i końca odcinka

- Jeśli czterobitowe kody są zerowe to odcinek jest akceptowany (suma logiczna - OR)
- Jeśli iloczyn logiczny (AND) kodów nie jest równy zero to odcinek można odrzucić

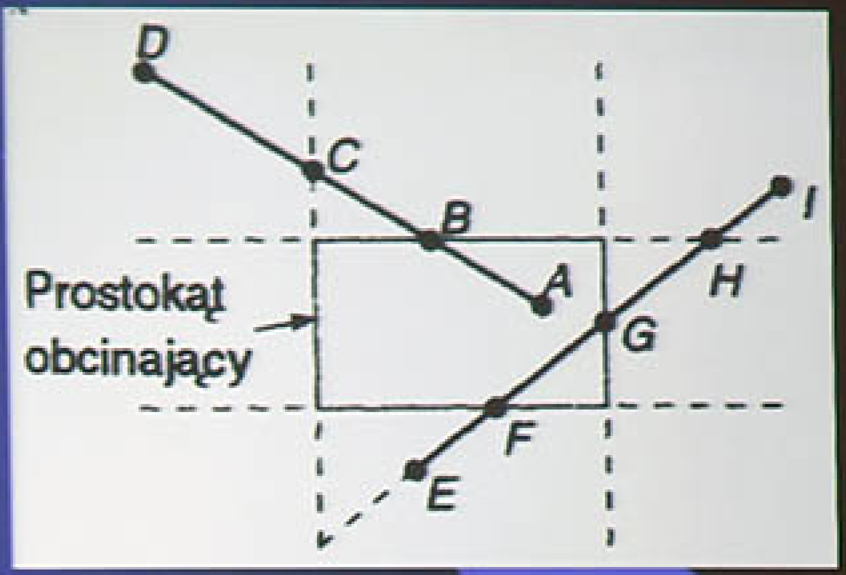
Algorytm Cohena-Sutherlanda (3)

Podział odcinka
Podziału dokonujemy wykorzystując krawędź, którą odcinek przecina. W algorytmie musimy korzystać z tego samego porządku testowania np. (góra, dół, prawa, lewa)

Bity kodu odpowiadają przecinanym krawędziom



Przykład 1



Odcinek AD (A - 0000, D - 1001)

- A OR D = 1001 <> 0

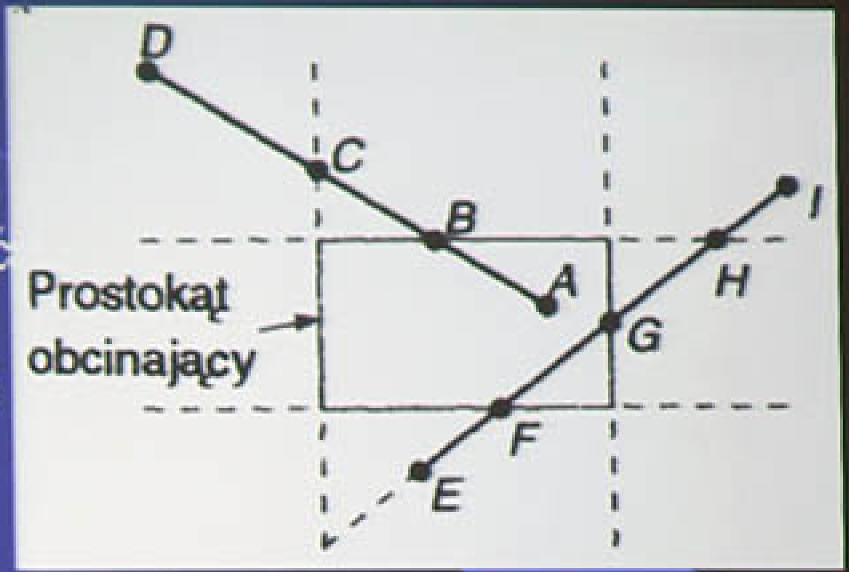
  Nie można zaakceptować odcinka
- A AND D = 0

  Nie można odrzucić odcinka
- Wybieramy punkt D (jako punkt zewnętrzny)

  Odcinek przecina krawędź górną i lewą (kod 1001)
- Obcinamy krawędzią górną i otrzymujemy AB

  Porządek testowania powoduje, że najpierw obcinamy krawędzią górną
- Analizujemy odcinek AB

Przykład 2



- Odcinek EI (E - 0100, I - 1010)

  Nie można zaakceptować ani odrzucić odcinka
- Wybieramy punkt E (jako punkt zewnętrzny)

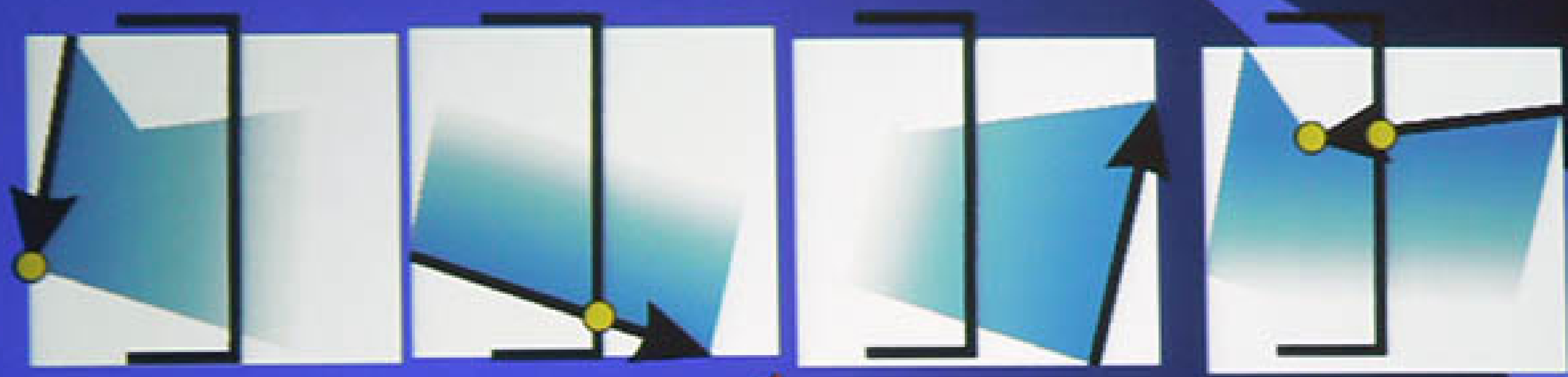
  Odcinek przecina krawędź dolną
- Obcinamy krawędzią dolną i otrzymujemy FI
- Analizujemy FI (F - 0000, I - 1010)

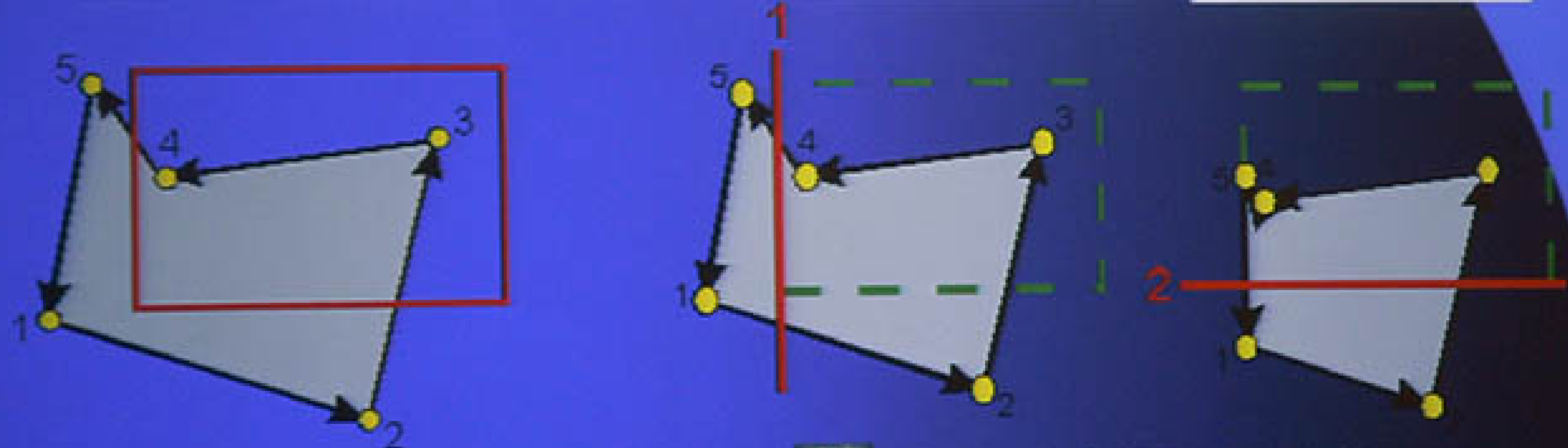
  Nie można zaakceptować ani odrzucić odcinka
- Wybieramy punkt zewnętrzny I

  Odcinek przecina krawędź górną i prawą.
- Obcinamy krawędzią górną i otrzymujemy FH (H-0010)
- Analizujemy odcinek FH i otrzymujemy FG

Algorytm Sutherlanda-Hodgmana

Obcinanie wielokąta prostą obcinającą
(obcinanie kolejnymi krawędziami wielokąta)





Krzywe parametryczne

- $x = f_x(t); \quad y = f_y(t)$
- funkcje liniowe $x = 20t + 5$
  $y = 10t + 100$

t	0	1	2	3	4
x	5	25	45	65	85
y	100	110	120	130	140

- funkcje nieliniowe $x = 2t^2 + 4$
  $y = t^2 + 5$

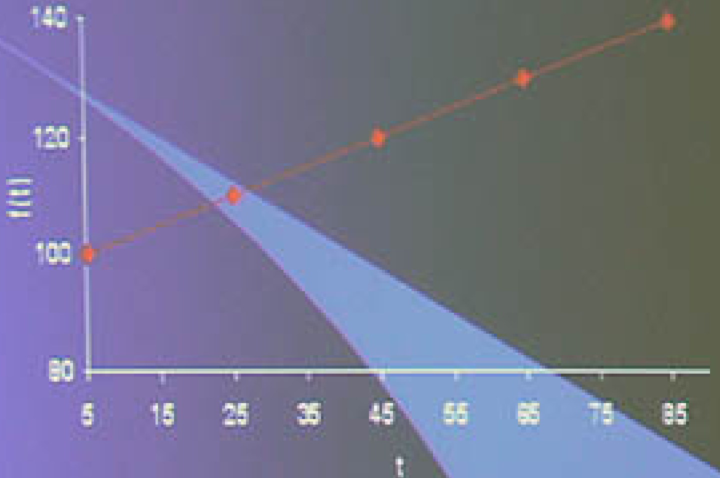
t	0	1	2	3	4
x	4	6	12	22	36
y	5	6	9	14	21

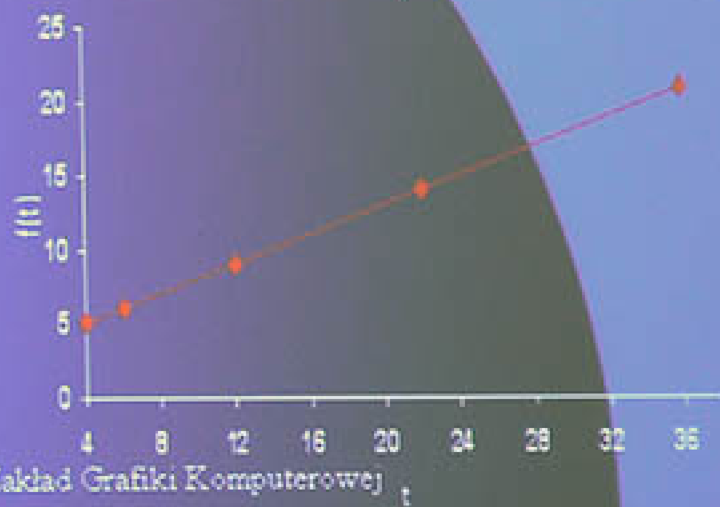
jeśli $t' \in <0,1>$ $t' = 1/4*t \Rightarrow t = 4t'$

$x' = 2(4t')^2 + 4 = 32t'^2 + 4$

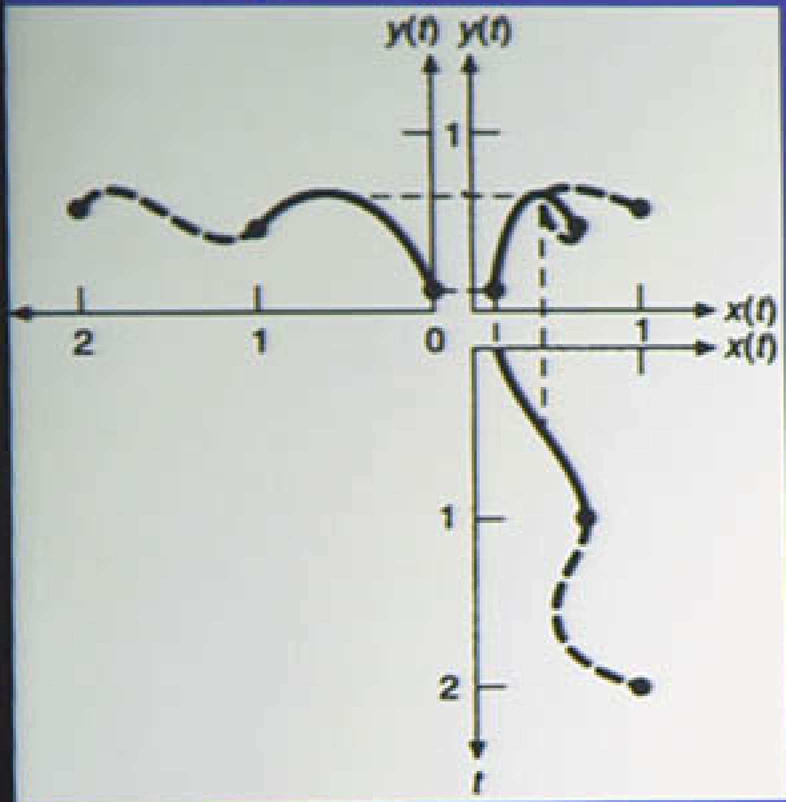
$y' = (4t')^2 + 5 = 16t'^2 + 5$

t'=(0, 1/4, 1/2, 3/4, 1)





Parametryczne krzywe trzeciego stopnia



- $f(t) = at^3 + bt^2 + ct^1 + d$

  $x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t^1 + d_x$
  $y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t^1 + d_y$
  $z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t^1 + d_z$

$Q(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

- Reguła Hornera

  $f(t) = ((at + b)t + c)t + d$

- Wektory styczne w punkcie

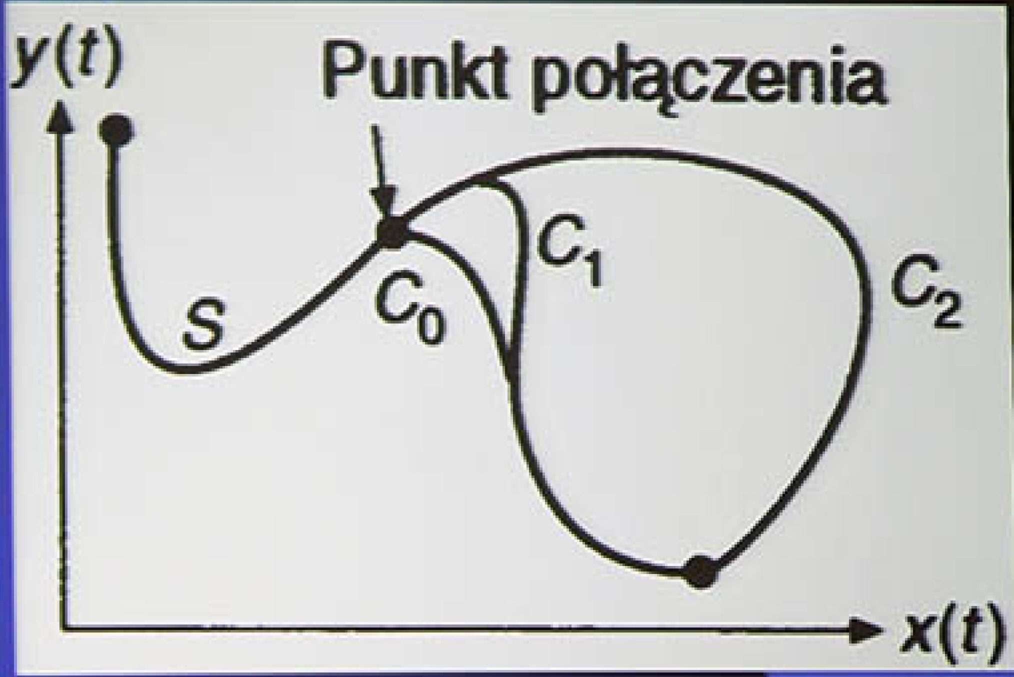
$Q'(t) = [d/dt\ x(t), d/dt\ y(t), d/dt\ z(t)]$

$f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

Ciągłość

Ciągłość geometryczna

- G^0 połączenie segmentów
- G^1 kierunki wektorów stycznych (nachylenie segmentów) równe w punkcie połączenia



Ciągłość parametryczna C^n

pochodna jest parametrycznym wektorem stycznym

- C^1 kierunki i długości wektorów stycznych (pierwsza pochodna) są równe
- C^2 kierunki i długości wektorów drugiej pochodnej są równe

Krzywa jako kombinacja liniowa punktów (1)

$P(x,y) = P\,(\,f_x(t),\, f_y(t)\,)$ $\quad t \in \langle 0,1 \rangle$

$f(t) = at + b$

$$\begin{cases} x = a_x t + b_x \\ y = a_y t + b_y \end{cases}$$

- punkt początkowy $P_p(x_p, , y_p)$

$\underline{t = 0}$:

$P_p = (x_p = x(0),\ y_p = y(0));$

- punkt końcowy $P_k(x_k, y_k)$

$\underline{t = 1}$:

$P_k = (x_k = x(1),\ y_k = y(1));$

$$\begin{cases} x_p = x(0) = b_x \\ x_k = x(1) = a_x + b_x = a_x + x_p \\ \\ y_p = y(0) = b_y \\ y_k = x(1) = a_y + b_y = a_y + y_p \end{cases}$$

Krzywa jako kombinacja liniowa punktów (2)

Dla punktów $P_p(x_p,y_p)$ i $P_k(x_k, y_k)$ wyznaczamy współczynniki a_x, b_x, a_y, b_y

$b_x = x_p$ $\qquad$ $b_y = y_p$

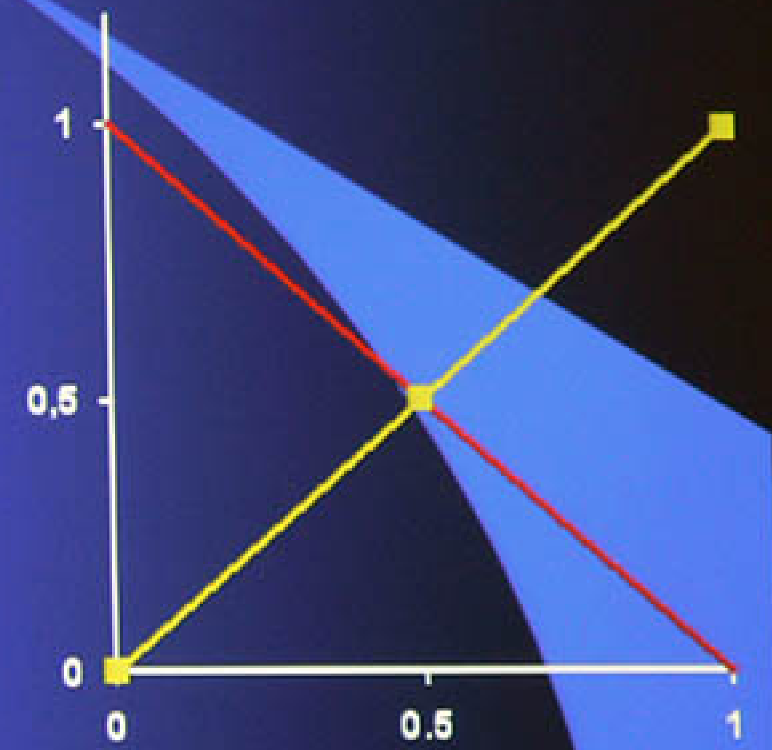
$a_x = x_k - x_p$ $\qquad$ $a_y = y_k - y_p$

$$x = a_x t + b_x = (x_k - x_p)\, t + x_p \qquad t \in \langle 0,1 \rangle$$
$$y = a_y t + b_y = (y_k - y_p)\, t + y_p$$

$$\begin{cases} x = x_p\,(1-t) + x_k\, t \\ y = y_p\,(1-t) + y_k\, t \end{cases}$$

$$\mathbf{Q(t) = (1-t)\, P_p + t\, P_k}$$

$$Q(t) = \Sigma_i\, W_i(t)\, P_i$$



Krzywe Béziera

Określone przez punkty końcowe (P_1,P_4) i dwa punkty kontrolne (P_2,P_3).

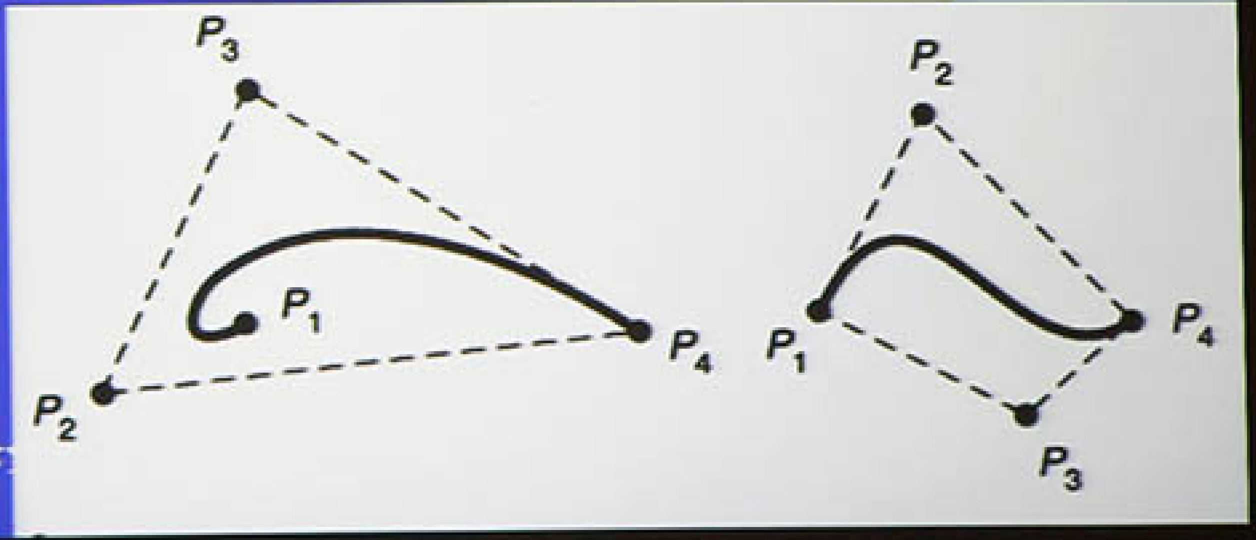
$$Q(t) = \Sigma^{n}_{i=0} B_i^n(t)\, P_{i+1} \qquad t \in \langle 0,1 \rangle$$

$B_0^{\,3} = (1-t)^3$ $\qquad$ $B_1^{\,3} = 3t\,(1-t)^2$

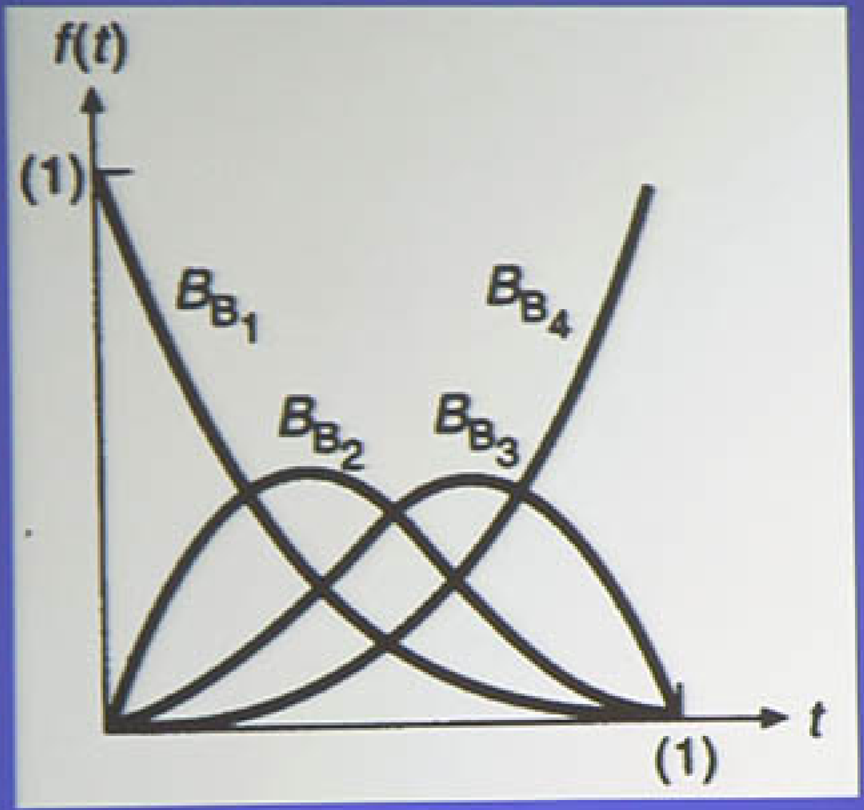
$B_2^{\,3} = 3t^2(1-t)$ $\qquad$ $B_3^{\,3} = t^3$

$$Q(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t)\, P_3 + t^3 P_4$$

- $Q(0) = P_1$
- $Q(1) = P_4$
- $Q'(0) = 3(P_2 - P_1)$
- $Q'(1) = 3(P_4 - P_3)$



Własności krzywych Béziera



Wielomiany Bernsteina

- $\Sigma^n_{i=0} B_i^n = 1$
- $B_i^n(t) \geq 0$ dla $t \in \langle 0,1 \rangle$

Własności krzywych

- początek w P_1
- koniec w P_4
- w P_1 krzywa jest styczna do wektora $P_2 - P_1$
- w P_4 krzywa jest styczna do wektora $P_4 - P_3$

- krzywa zawarta jest w wielokącie rozpiętym na punktach kontrolnych

Łączenie krzywych Beziera

x^l - segment lewy

x^r - segment prawy

- Ciągłość C^0

  $x^l(1) = x^r(0) = P_4$

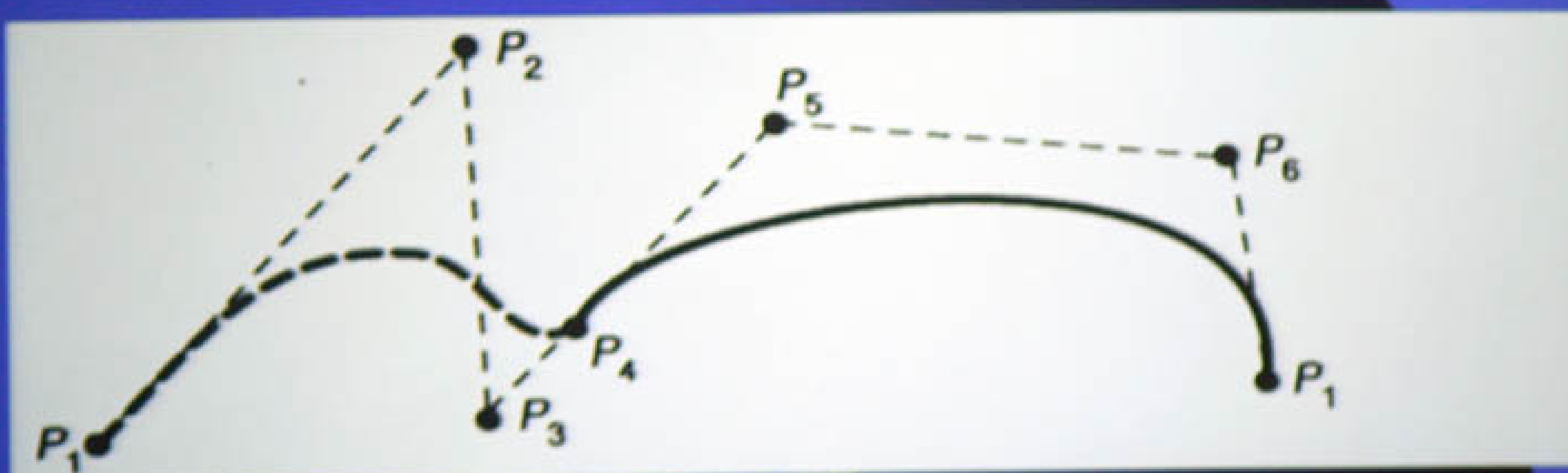
- Ciągłość C^1

  $d/dt\, x^l(1) = d/dt\, x^r(0)$

  $d/dt\, x^l(1) = 3(P_4 - P_3)$

  $d/dt\, x^r(0) = 3(P_5 - P_4)$

  $P_4 - P_3 = P_5 - P_4$



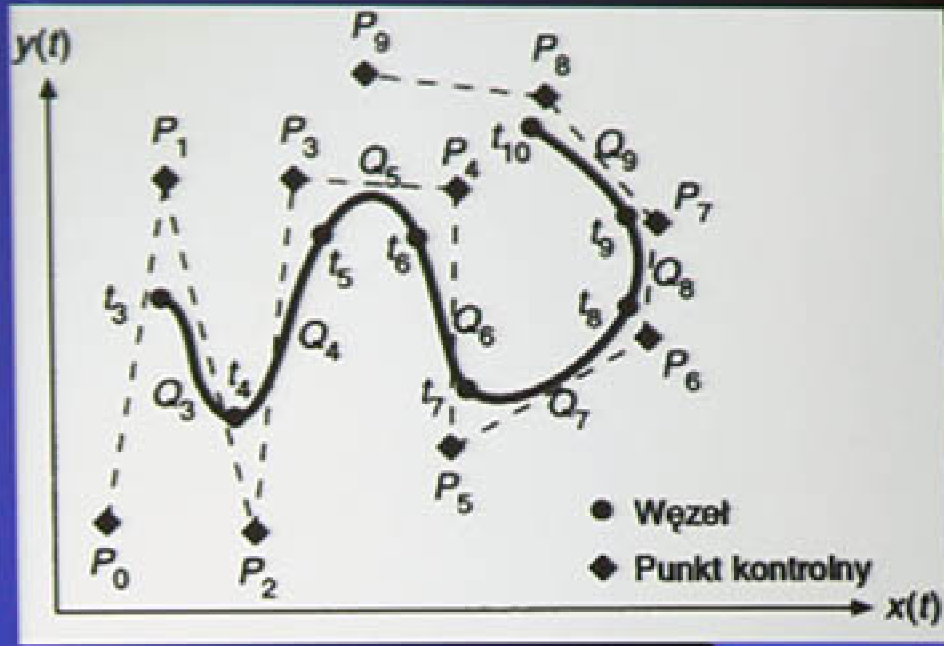
Jednorodne nieułamkowe krzywe B-sklejane

- Złożona z segmentów $\mathbf{Q_i}$
- Segment określony jest przez 4 punkty kontrolne $\mathbf{P_{i-3}}$, $\mathbf{P_{i-2}}$, $\mathbf{P_{i-2}}$, $\mathbf{P_i}$ między węzłami $<\mathbf{t_i}, \mathbf{t_{i+1}}>$

  $Q_3 : P_0 - P_3$ dla $t \in <t_3,t_4>$

  $Q_4 : P_1 - P_4$ dla $t \in <t_4,t_5>$

  . . .



- Jednorodne, bo $t_i - t_{i-1} = 1$
- Nieułamkowe – funkcje wielomianowe
- B - bo reprezentowanie jako sumy ważone wielomianowych funkcji bazowych

- Bardzo gładkie ciągłość C^0, C^1, C^2
- Sterowanie lokalne - zmiana punktu wpływa na 4 segmenty
- można łatwo "zamykać" dodając punkty P_0, P_1, P_2

Funkcje bazowe krzywej B-sklejanej

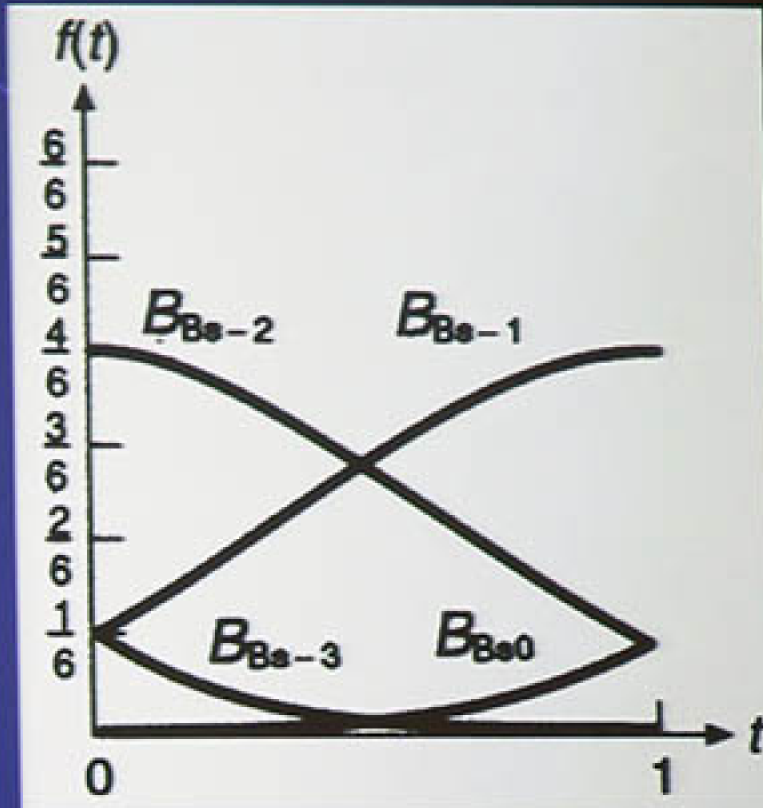
- $Q(t) =$

$B_{-3} : ((1-t)^3 / 6) P_{i-3} +$

$B_{-2} : ((3t^3-6t^2+4) / 6) P_{i-2} +$

$B_{-1} : ((-3t^3+3t^2+3t+1) / 6) P_{i-1} +$

$B_0 : (t^3 / 6) P_i$



- $\Sigma^0_{i=-3} B_i = 1$
- $B(t) \geq 0$ dla $t \in <0,1>$

- Segment Q_i zawarty jest w wielokącie rozpiętym na punktach kontrolnych