Laboratorium II: Modelowanie procesów fizycznych
Protokół ćwiczeń

Katedra Metod Komputerowych Techniki

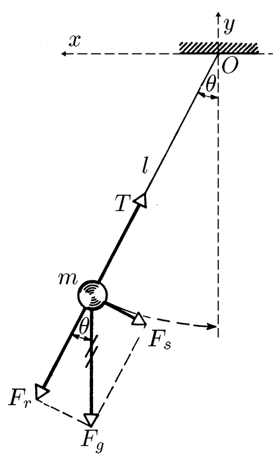
Polsko–Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych

DATA: 12 PAŹDZIERNIKA 2006	IMIĘ:	RAZEM PUNKTÓW
GRUPA:	NAZWISKO:	
NUMER ALBUMU:	E-MAIL:	

I. WAHADŁO PROSTE

Wahadłem nazywamy ciało zawieszone ponad swoim punktem równowagi. Wytrącone z położenia spoczynku wykonuje wahania (drgania) w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły grawitacji.

Szczególnym przypadkiem wahadła jest wahadło proste: punkt materialny zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici. Wahadło proste to matematyczna idealizacja wahadła fizycznego. Wahadło proste wraz z działającymi na nie siłami przedstawiono na Rysunku 1.



Rysunek 1 Siły działające na wahadło: siła grawitacji F_g oraz jej składowe: styczna F_s i radialna F_r, gdzie l – długość nici, T – siła naprężenia nici, θ – kąt wychylenia wahadła. Ośrodek układu współrzędnych O umieszczony w punkcie zawieszenia wahadła, tak że położenie równowagi znajduje się w $P_r = (0, -l)$ (RR93)

.

Opis sił oddziałujących na wahadło

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, aby wprawić w ruch pozostające w spoczynku ciało potrzebna jest działająca niezrównoważona zewnętrzna siła. Aby móc opisać ruch wahadła, przeanalizujmy siły działające na punkt materialny.

Zewnętrzna siła grawitacji F_g jest równa:

$$F_g = -mg, \tag{1}$$

gdzie m – masa wahadła, g – stała przyspieszenia ziemskiego. Ponieważ środek układu odniesienia O umieszczony jest w punkcie zawieszenia wahadła, a przyspieszenie ziemskie skierowane jest *w dół* względem tego punktu, prawa strona równania (1) jest ze znakiem *minus*.

Siłę F_g opisać można za pomocą dwóch składowych: radialnej oraz stycznej do toru ruchu wahadła. Wielkości obu składowych sił podlegają dynamicznym zmianom w zależności od kąta wychylenia θ wahadła z położenia równowagi. Składowa radialna F_r jest zawsze równoważona przez siłę naprężenia nici T. Wartość siły stycznej F_s określona jest wzorem:

$$F_s = F_g \sin\theta = -mg\sin\theta \tag{2}$$

Zakładamy, że ruch wahadła będzie odbywał się w zakresie małych odchyleń kątowych od położenia równowagi. Dla małych kątów możemy przyjąć, że kąt odchylenia θ wahadła od pionu jest bardzo bliski[1] $\sin\theta$:

$$\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta, \tag{3}$$

zgodnie z tym założeniem upraszczamy równanie (2) do następującej postaci:

$$F_s = -mg\theta \tag{4}$$

Założene o małych kątach upraszcza równanie ruchu wahadła prostego na tyle, że jesteśmy w stanie rozwiązać je zarówno numerycznie jak i analitycznie.

Równanie ruchu wahadła

Oddziaływanie na wahadło siły F_s nadaje głowicy wahadła prędkość v_s. Jest to prędkość styczna do toru ruchu wahadła o tym samym zwrocie co siła F_s. Mechanika klasyczna umożliwia powiązanie prędkości stycznej do toru ruchu po okręgu z prędkością kątową ω (przy stałej długości wahadła l oraz dla małych kątów) poprzez równanie:

$$v_s = l\omega, \tag{5}$$
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \tag{6}$$

Znając związek prędkości stycznej do kątowej, możemy wyprowadzić równanie ruchu wahadła prostego. Druga zasada dynamiki Newtona opisuje ruch (przyspieszenie) ciała jako efekt działających na to ciało sił (wzór ogólny):

$$\frac{F}{m} = a \tag{7}$$

gdzie a jest przyspieszeniem ciała. Przyspieszenie jest *zmianą* prędkości w czasie $a = \frac{dv}{dt}$. W opisywanym przypadku jest to prędkość styczna do toru ruchu wahadła $v = v_s$. Wyprowadzmy równanie ruchu w formie różniczkowej, używając poznaną wcześniej zależność prędkości stycznej z kątową. Do wzoru (7) podstawimy równania (5) oraz (6):

$$\frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_s}{dt} = \frac{d(l\omega)}{dt} = \frac{d\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{8}$$

Siłą wymuszająca ruch wahadła jest siła składowa styczna F_s, możemy teraz uzupełnić równanie (8) wyrażeniem (4) poprzez podstawienie $F = F_s$:

$$\frac{F_s}{m} = \frac{-mg\theta}{m} = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9}$$

[1] na przykład:

θ	$\sin\theta$	Różnica w %
$0° = 0.00000\ rad$	0.00000	0.00
$2° = 0.03491\ rad$	0.03490	0.03
$5° = 0.08727\ rad$	0.08716	0.24
$10° = 0.17453\ rad$	0.17365	0.50
$15° = 0.26180\ rad$	0.25882	1.14

Upraszczając wyrażenie (9) otrzymujemy równanie różniczkowe drugiego rzędu opisujące ruch wahadła prostego:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g\theta}{l} \tag{10}$$

Rozwiązaniem tego równania jest zależność położenia kątowego wahadła od czasu $\theta(t)$. Na podstawie tej zależności, dla każdej chwili czasowej możliwe jest określenie położenia wahadła $P(t) = (x, y)$. Współrzędne x oraz y dla danego kąta wychylenia wahadła wyznaczyć można z zależności trygonometrycznych (patrz też Rysunek 1):

$$x = l \sin\theta, \tag{11}$$

$$y = -l \cos\theta \tag{12}$$

II. ZADANIA

Zadanie 1 (5 punktów)

Proszę napisać program komputerowy realizujący symulację ruchu wahadła prostego rozwiązując numerycznie metodą Eulera (pierwszego rzędu) równanie ruchu wahadła.

Wyznaczyć energię potencjalną E_p oraz kinetyczną E_k wahadła w każdej chwili czasowej, policzyć energię całkowitą E_c. Czy $E_c = const$? (stworzyć tabelę wyników, przedstawić wykres przebiegu energii w czasie oraz sumy energii w czasie). Zinterpretować wyniki.

Symulację proszę przeprowadzić dla dla okresu n sekund, przy kroku symulacji $\Delta t = ms$.

Zadanie 2 (5 punktów)

Proszę przeprowadzić symulację wahadła za pomocą trzech poznanych metod numerycznych (metody Eulera, ulepszonej metody Eulera oraz Rungego-Kutty).

Wyznaczyć zależność prędkości od czasu (tabelka wyników oraz wykres) dla każdej z metod. Która z nich daje najlepsze wyniki przybliżenia? Jaki jest błąd średni każdej z metod względem rozwiązania analitycznego? Która z metod jest najmniej stabilna i od czego zależy jej stabilność?

Literatura

[RR93] David Halliday Robert Resnick. *Fizyka 1.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.

Dodatek A: Wzory pomocnicze

Energia potencjalna:

$$E_p = mg(y+l), \quad y < 0 \tag{A1}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{A2}$$

Energia całkowita:

$$E_c = E_p + E_k \tag{A3}$$

Rozwiązanie analityczne równania ruchu uproszczonego modelu wahadła (założenie o małych kątach) jest tożsame z równaniem oscylatora harmonicznego prostego i ma postać:

$$\theta = \theta_m \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) \tag{A4}$$

Dodatek B: Stałe

Przyspieszenie ziemskie normalne (na szerokości geograficznej 45° i poziomie morza):
$g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$

Masa głowicy wahadła:
$m = 1kg$

Długość nici:
$l = 1m$

Maksymalne wychylenie wahadła:
$\theta_m = 15°$