SZEREG TAYLORA

Służy do przybliżania funkcji za pomocą wielomianu. Trzeba mieć wybrany punkt x_0.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0) * (x - x_0)^1 + \frac{1}{2!} * f''(x_0) * (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(x_0) * (x - x_0)^n + \\ + R_{n+1}$$

R_{n+1} - błąd przybliżenia

<u>Przykład</u>:
Napisz wielomian Taylora 3-go stopnia.

$$f(x) = e^{\cos x} \text{ w } x_0 = \frac{\pi}{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^0 = 1$$
$$f'(x) = e^{\cos x} * (-\sin x) \quad ; \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 * (-1) = -1$$
$$f''(x) = e^{\cos x} * (-\sin x) * (-\sin x) + e^{\cos x} * (-\cos x) = e^{\cos x} * \sin^2 x - e^{\cos x} * \cos x$$
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$f^{(3)} = e^{\cos x} * (-\sin x) * \sin^2 x + e^{\cos x} * 2\sin x * \cos x \\ - \left(e^{\cos x} * (-\sin x) * \cos x + e^{\cos x} * (-\sin x)\right)$$
$$f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0$$
$$e^{\cos x} \approx 1 + (-1) * \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} * 1 * \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 0$$

<u>Przykład</u>:
Wyznacz wielomian Taylora 2-go stopnia dla $f(x) = \sqrt[4]{16 - x} \quad w \quad x_0 = 0$
a następnie oblicz (korzystając z tego co się wyliczyło) przybliżoną wartość $\sqrt[4]{15{,}9}$.

$$f(x) = \sqrt[4]{16 - x} = (16 - x)^{\frac{1}{4}}$$

$$f(x_0) = f(0) = 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{4}(16 - x)^{-\frac{3}{4}} * (-1)$$
$$f'(x_0) = -\frac{1}{4 * \left(\sqrt[4]{16 - x}\right)^3} = -\frac{1}{32}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4} * \left(-\frac{3}{4}\right) * (16 - x)^{-\frac{7}{4}} * (-1)$$
$$f''(x_0) = -\frac{3}{4\left(\sqrt[4]{16 - x}\right)^7} = -\frac{3}{4 * 2^7} = -\frac{3}{4 * 128} = -\frac{3}{2048}$$
$$\sqrt[4]{16 - x} \approx 2 + \left(-\frac{1}{32}\right) * (x - 0) + \frac{1}{2} * -\frac{3}{2^{11}} * (x - 0)^2$$
$$16 - x = 15{,}9 \Longrightarrow x = 0{,}1$$
$$\sqrt[4]{15{,}9} \approx 2 + \left(-\frac{1}{32}\right) * 0{,}1 + \frac{1}{2} * \left(-\frac{3}{11}\right) * 0{,}1^2$$

POCHODNE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

$z = f(x, y)$

$f'_x = \frac{\delta f}{\delta x} \quad ; \quad f'_y = \frac{\delta f}{\delta y}$

$f''_{xx} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \quad ; \quad f''_{yx} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$

$f''_{xy} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \quad ; \quad f''_{yy} = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$

Różniczka funkcji w punkcie x_0 dla jednej zmiennej:

$df = f' * \Delta x \quad ; \quad \Delta = x - x_0$

Różniczka funkcji w punktach x_0, y_0 dla dwóch zmiennych:

$$z = f(x, y) \quad \text{w} \quad (x_0, y_0)$$

I rzędu:

$$df = f'_x(x_o, y_0) * (x - x_0) + f'_y(x_o, y_0)(y - y_0)$$

II rzędu:

$$d^2 f = f''_{xx}(x_o, y_0) * (x - x_0)^2 + 2 f''_{xy}(x_o, y_0) * (x_o, y_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_o, y_0) * (y - y_0)^2$$

Przybliżenie za pomocą różniczki pierwszego rzędu:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_o, y_0) * (x - x_0) + f'_y(x_o, y_0)(y - y_0)$$

Przybliżenie za pomocą różniczki drugiego rzędu:

$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_o, y_0) * (x - x_0) + f'_y(x_o, y_0)(y - y_0) +$

$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_o, y_0) * (x - x_0)^2 + 2 f''_{xy}(x_o, y_0) * (x_o, y_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_o, y_0) * (y - y_0)^2\right]$

Zadanie:

Wykorzystując różniczkę I i II rzędu znajdź przybliżoną wartość $(1{,}02)^3 * (0{,}997)^2$.

$x = 1{,}02 \quad ; \quad y = 0{,}997$

$(x_0, y_0) = (1{,}1)$

$f(x, y) = x^3 * y^2$

$\Delta x = x - x_0 = 0{,}02$

$\Delta y = y - y_0 = -0{,}003$

$f(1{,}1) = 1$

$f'_x = y^2 * 3x^2 \quad ; \quad f'_x(1{,}1) = 3$

$f'_y = x^3 * 2y \quad ; \quad f'_y(1{,}1) = 2$

$f''_{xx} = 3y^2 * 2x \quad ; \quad f''_{xx}(1{,}1) = 6$

$f''_{xy} = 3x^2 * 2y \quad ; \quad f''_{xy}(1{,}1) = 6$

$f''_{yx} = 2y * 3x^2 \quad ; \quad f''_{yx}(1{,}1) = 6$

$f''_{yy} = 2x^3 * 2 \quad ; \quad f''_{yy}(1{,}1) = 2$

Kończymy za pomocą różniczki I rzędu:

$(1{,}02)^3 * (0{,}997)^2 \approx 1 + 3 * 002 + 2 * (-0{,}003)$

Kończymy za pomocą różniczki II rzędu:

$(1{,}02)^3 * (0{,}997)^2 \approx$

$\approx 1 + 3 * 002 + 2 * (-0{,}003) + \frac{1}{2}[6 * (0{,}02)^2 + 2 * 6 * (0{,}02) * (-0{,}003) + 2 * (-0{,}003)^2]$

Zadanie:
Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji:

$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$

1. Liczymy pochodną funkcji
2. Szukamy x_0 ; $f'(x) = 0$
3. Sprawdzamy czy w x_0 jest ekstremum

a) I sposób – liczymy drugą pochodną $f''(x)$

b) II sposób – czy $f'(x)$ zmienia znak w x_0

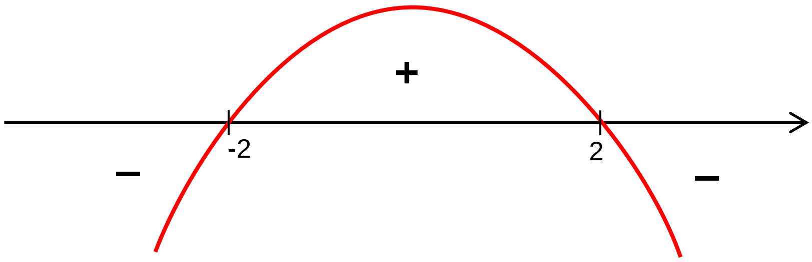
$D(f) = R$

$$f'(x) = \frac{4 * (x^2 + 4) - 4x * 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-4x^2 + 16}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\frac{-4x^2 + 16}{(x^2 + 4)^2} = 0$$

$16 - 4x^2 = 0 \Longrightarrow 4^2 - (2x)^2 = 0 \Longrightarrow (4 + 2x)(4 - 2x) = 0$

$x_1 = 2 \quad \vee \quad x_2 = -2$



x	$(-\infty, -2)$	-2	(-2, 2)	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	–	-2	+	2	+
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

Minimum, gdy funkcja jest najpierw malejąca, a potem rosnąca.
Maximum gdy funkcja jest najpierw rosnąca, a potem malejąca.

Zadanie:
Wyznacz przedziały wypukłości i punkty przegięcia dla funkcji:

$f(x) = x * e^{-x}$

$\boldsymbol{f''(x) > 0 \quad f(x)}$ **wypukła**

$\boldsymbol{f''(x) < 0 \quad f(x)}$ **wklęsła**

$f'(x) = 1 * e^{-x} + x * e^{-x} * (-1)$

$f''(x) = e^{-x} * (-1) - [(1 * e^{-x} + x * e^{-x} * (-1))]$

$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + x * e^{-x} = -2e^{-x} + x * e^{-x}$

$-2e^{-x} + x * e^{-x} = 0$
$e^{-x}(-2 + x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

$f''(x) = 0 \text{ dla } x = 2, \text{to punkt przegięcia}$
$f''(x) > 0 \text{ dla } x > 2, to \text{ funkcja wypukła}$
$f''(x) < 0 \text{ dla } x < 2, to \text{ funkcja wklęsła}$

Zadanie:
Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$ w przedziale <1, 4>.

Etapy obliczania:
1. Szukamy ekstremów wewnątrz przedziału.
2. Porównujemy ekstremum wewnątrz przedziału z wartościami na krańcach.

$D(f): x \neq 0$
$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{3}$$
$$-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{3} = 0 \Longrightarrow \frac{-9 + x^2}{3x^2} = 0$$
$$\frac{-9 + x^2}{3x^2} = 0 \quad \because * \, 3x^2$$
$(x - 3)(x + 3) = 0$
$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = -3$
$x_2 \text{nie należy do przedziału} < 1{,}4 >$

$f(3) = 2$
$$f(1) = \frac{4}{3} \quad \text{najmniejsza}$$
$$f(4) = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} \quad \text{największa}$$

ALGORYTM SZUKANIA EKSTREMÓW LOKALNYCH DLA FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

$$z = f(x, y)$$

Etapy obliczania:
1. Szukamy punktów „podejrzanych" w których mogą pojawić się ekstrema
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0, y_0)$$
2. Sprawdzamy, czy w (x_0, y_0) jest ekstremum
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ad - bc}$$

$$W = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} ;$$

$\text{jeśli } W(x_0, y_0) > 0 \; to \; w \; (x_0, y_0) \text{ jest ekstremum}$
$\text{jeśli } f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ to minimum}$
$\text{jeśli } f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ to maximum}$
$\text{jeśli } W(x_0, y_0) < 0 \text{ to nie ma ekstremum (punkt siodłowy)}$
$\text{jeśli } W(x_0, y_0) < 0 \text{ to nie wiadomo i trzeba badać z definicji}$

$f(x, y)$ma $w\ (x_0, y_0)$ maksimum, jeśli istnieje otoczenie u punktu w (x_0, y_0),
tak, że $\forall_{(x,y)\in u}\quad f(x, y) < f(x_0, y_0)$

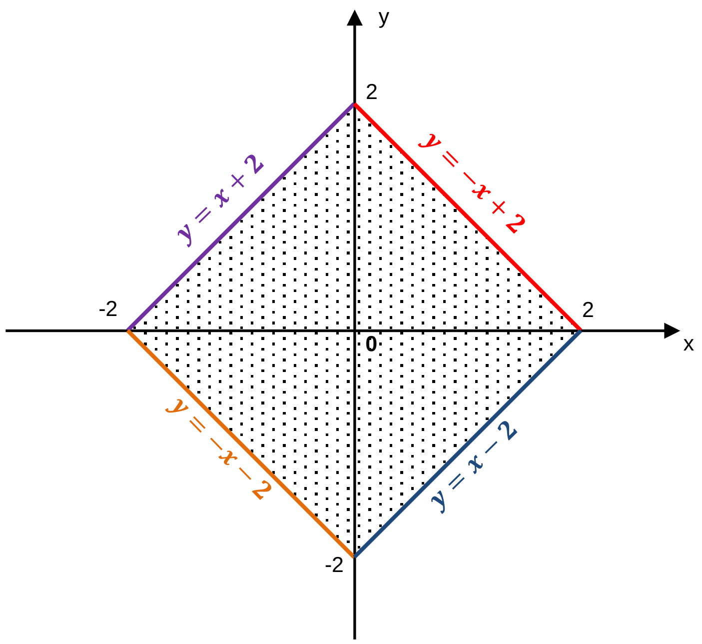
Zadanie:
Zbadać z definicji istnienie ekstremum dla $f(x, y) = 3x^6 + 2y^8$
$f(x, y) \geq 0$
$f(x, y) = 0\ tylko\ dla\ (x, y) = (0,0)$
$\forall_{(x,y)\neq(0,0)}\ f(x, y) > 0$

Odp.: W (0,0) jest minimum

Zadanie:
Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ na zbiorze opisanym tak:
$|x| + |y| \leq 2$

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} \text{ dla } \boldsymbol{a} \geq 0 \\ -\boldsymbol{a} \text{ dla } \boldsymbol{a} < 0 \end{cases}$$

1) $\boldsymbol{x \geq 0 \wedge y \geq 0}$
$\boldsymbol{x + y \leq 2 \rightarrow y \leq -x + 2}$
2) $\boldsymbol{x \geq 0 \wedge y < 0}$
$\boldsymbol{x - y \leq 2 \rightarrow y \geq x - 2}$
3) $\boldsymbol{x < 0 \wedge y < 0}$
$\boldsymbol{-x - y \leq 2 \rightarrow y \geq -x - 2}$
4) $\boldsymbol{x < 0 \wedge y \geq 0}$
$\boldsymbol{-x + y \leq 2 \rightarrow y \leq x + 2}$



1. Szukamy ekstremów wewnątrz zbioru

$f'_x = 2x$
$f'_y = 2y$
$\begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$

$f(0,0) = 0$

2. Szukamy ekstremów na brzegu
   a) $y = -x + 2 \vee x \in <0,2>$
   $f(x, -x + 2) = x^2 + (-x + 2)^2 = 2x^2 - 4x + 4$
   Szukamy najmniejszej i największej wartości $2x^2 - 4x + 4$ w $< 0,2 >$
   $f'_x = 4x - 4 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1 + 2 = 1$
   $f(1,1) = 2\quad ;\quad f(0,2) = 4\quad ;\quad f(2,0) = 4$
   b) $y = x - 2 \vee x \in <0,2>$
   $f(x, x - 2) = x^2 + (x + 2)^2 = 2x^2 - 4x + 4$
   Szukamy najmniejszej i największej wartości $2x^2 - 4x + 4$ w $< 0,2 >$
   $f'_x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1 + 2 = 1$
   $f(1, -1) = 2\quad ;\quad f(0, -2) = 4$

c) $y = -x - 2 \vee x \in < -2{,}0 >$

$f(x, -x-2) = x^2 + (-x-2)^2 = 2x^2 + 4x + 4$

$f_x' = 4x + 4 = 0 \to x = -1 \to y = -1$

$f(-2{,}0) = 4 \quad ; \quad f(-1,-1) = 2$

$y = x + 2 \vee x \in < -2{,}0 >$

Zadanie:

Wyznaczyć ekstrema lokalne $f(x,y) = e^x * (x + y^2)$

1. Liczymy pochodne

$f_x' = e^x * (x + y^2) + e^x * 1$

$f_y' = e^x * 2y$

$\begin{cases} e^x * (x + y^2) + e^x * 1 = 0 \\ e^x * 2y = 0 \ \ (\boldsymbol{e^x > 0}) \to y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ e^x * x + e^x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ e^x(x+1) = 0 \ \to x = -1 \end{cases}$

2. Liczymy drugie pochodne

$f_{xx}'' = e^x * (x + y^2) + e^x * 1 + e^x = e^x * (x + y^2) + 2e^x$

$f_{xy}'' = e^x * 2y$

$f_{yx}'' = e^x * 2y$

$f_{yy}'' = e^x * 2$

$f_{xx}''(-1{,}0) = e^{-1} * (1 + 0) + e^{-1} + e^{-1} = e^{-1}$

$f_{xy}''(-1{,}0) = 0$

$f_{yx}''(-1{,}0) = 0$

$f_{yy}''(-1{,}0) = 2e^{-1}$

$W = \begin{vmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = 2e^{-2} > 0$

$f_{xx}''(-1{,}0) = e^{-1} > 0 \ - \ \text{jest to minimum}$

Zadanie:

Wyznaczyć ekstrema lokalne $f(x,y) = x^2 + y^3 - 6xy - 48y$

1. Liczymy pochodne

$f_x' = 2x - 6y$

$f_y' = 3y^2 - 6x - 48$

$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x - 48 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y \\ 3y^2 - 18y - 48 = 0 \ \ \because /3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y \\ y^2 - 6y - 16 = 0 \end{cases}$

$y^2 - 6y - 16 = 0$

$\Delta = 36 + 64 = 100$

$y_1 = \frac{6-10}{2} = -2 \quad \to x_1 = 3 * (-2) = 6$

$y_2 = \frac{6+10}{2} = 8 \quad \to \quad x_2 = 3 * 8 = 24$

$(x_1, y_1) = (-6, -2)$

$(x_2, y_2) = (24, 8)$

2. Liczymy drugie pochodne

$f''_{xx} = (2x - 6y)'_x = 2 - 0 = \mathbf{2}$

$f''_{xy} = (2x - 6y)'_y = 0 - 6 = \mathbf{-6}$

$f''_{yx} = (3y^2 - 6x - 48)'_x = 0 - 6 = \mathbf{-6}$

$f''_{yy} = (3y^2 - 6x - 48)'_y = 6y - 0 - 0 = \mathbf{6y}$

$W = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{vmatrix} = 12y + (-36)$

$W(-6, -2) = -24 - 36 = -60 < 0 \to \text{nie ma ekstremum}$

$W(24, 8) = 6 - 36 = 60 > 0 \to \text{ekstremum}$

$f''_{xx} > 0 \to \text{minimum}$

<u>Zadanie</u>:

Wyznaczyć ekstrema lokalne $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x + 24y$

1. Liczymy pochodne

$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 51$

$f'_y = 6xy - 24$

$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 51 = 0 \\ 6xy - 24 = 0 \ \because /6 \end{cases}$

$\begin{cases} xy - 4 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 51 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{4}{y} \\ 3 * \frac{16}{y^2} + 3y^2 - 51 = 0 \ \because /3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{4}{y} \\ \frac{16}{y^2} + y^2 - 17 = 0 \ \because * y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{4}{y} \\ y^4 - 17y^2 + 16 = 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{y^2 = t}$

$\begin{cases} x = \frac{4}{y} \\ t^2 - 17t + 16 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 289 - 64 = 225$

$t_1 = \frac{17-15}{2} = 1 \quad ; \quad t_2 = \frac{17+15}{2} = 16$

$t_1 = y^2 = 1 \to y_1 = 1 \vee y_2 = -1$

$t_2 = y^2 = 16 \to y_1 = 4 \vee y_2 = -4$

$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = -4 \quad ; \quad x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = -1$

2. Liczymy drugie pochodne

$f''_{xx} = 3 * 2x$

$f''_{xy} = 3 * 2y$

$f''_{yx} = 6y$

$f''_{yy} = 6x$

$W = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2$

$W(4,1) = 36 * 4^2 - 36 > 0 \to \text{ekstremum}$

$f''_{xx}(4,1) > 0 \to \text{jest minimum}$

$W(-4,-1) = 36 * (-4)^2 - 36 * (-1)^2 > 0 \to \text{jest ekstremum}$

$f''_{xx}(-4,-1) = -24 < 0 \to \text{jest maximum}$

$W(1,4) = 36 * 1^2 - 36 * 4^2 < 0 \to \text{nie ma ekstremum, punkt siodłowy}$

$W(-1,-4) = 36 * (-1)^2 - 36 * (-4)^2 < 0 \to \text{nie ma ekstremum, punkt siodłowy}$