Wykład 9 – zadania domowe - ODP

1. Sprawdzić, że podany zbiór W jest podprzestrzenią liniową odpowiedniej przestrzeni liniowej V:

$$W = \{[2x - y, y + z] \in R^2 : x, y, z \in R\}; \quad V = R^2$$

Sprawdzamy czy suma wektorów podzbioru W należy do zbioru W
(czy sumowanie jest działaniem wewnętrznym w podzbiorze W)

$$\vec{m} = [2x_1 - y_1, y_1 + z_1]$$
$$\vec{n} = [2x_2 - y_2, y_2 + z_2]$$

1. $\vec{m} + \vec{n} = [2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2] = [2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)]$
   $x_3 = x_1 + x_2$
   $y_3 = y_1 + y_2$
   $z_3 = z_1 + z_2$
   $\vec{m} + \vec{n} = [2x_3 - y_3, y_3 + z_3] \quad \in W$

Sprawdzamy czy iloczyn wektora podzbioru W i liczby należącej do R nadal jest elementem podzbioru W.
(czy mnożenie wektora przez liczbę reczywistą jest działaniem wewnętrznym w podzbiorze W)

2. $\lambda \in R; \quad \lambda \cdot \vec{m} = [\lambda \cdot (2x_1 - y_1), \lambda \cdot (y_1 + y_2)] = [2\lambda x_1 - \lambda y_1, \lambda y_1 + \lambda y_2] \quad \in W$

2. **Wektory [3,-2,5], [0,1,1] przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów [3,-2,5], [1,1,1], [0,-5,2]**

Dla wektora [3,-2,5] mamy równanie wektorowe i odpowiadający mu układ równań:

$$[3,-2,5] = a[3,-2,5] + b[1,1,1] + c[0,-5,2]$$

$$\begin{cases} 3a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 3a \\ -2a + b - 5c = -2 \\ 5a + b + 2c = 5 \end{cases}$$

Podstawiając *b* do 2-go równania otrzymujemy: $c = 1 - a$

Podstawiając *b* i *c* do 3-go równania otrzymujemy: $1 = 1$ co świadczy o tym, że *a* może przyjąć dowolną wartość

$$\begin{cases} b = 3 - 3a \\ c = 1 - a \\ a - dowolne \end{cases}$$

$$[3,-2,5] = a[3,-2,5] + (3 - 3a)[1,1,1] + (1 - a)[0,-5,2]$$
$$np \quad a = 1$$
$$[3,-2,5] = 1[3,-2,5] + 0[1,1,1] + 0[0,-5,2]$$

Dla wektora [0,1,1] mamy równanie wektorowe i odpowiadający mu układ równań:

$$[0,1,1] = a[3,-2,5] + b[1,1,1] + c[0,-5,2]$$

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \\ -2a + b - 5c = 1 \\ 5a + b + 2c = 1 \end{cases}$$

Podstawiając *b* do 2-go równania otrzymujemy: $c = \frac{-1 - 5a}{5}$

Podstawiając *b* i *c* do 3-go równania otrzymujemy: $-2 = 5$ co świadczy o tym, równanie jest sprzeczne a co za tym idzie nie można przedstawić wektora $[0,1,1]$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $[3,-2,5],[1,1,1],[0,-5,2]$

3. Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

$a)$ $[1,-2,3],\ [1,0,1],[0,2,-1]$; $w\ przestrzeni\ R^3$

$b)$ $[1,-2,3],\ [1,0,1],[0,2,-1]$; $w\ przestrzeni\ R^3$

Sprawdzamy czy równanie wektorowe ma jedyne rozwiązanie zerowe na a,b,c:

$$a[1,-2,3]+b[1,0,1]+c[0,2,-1]=[0,0,0]$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a+2c=0 \\ 3a+b-c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-a \\ c=a \\ a=0 \Rightarrow b=0 \wedge c=0 \Rightarrow wektory\ są\ liniowo\ niezalezne \end{cases}$$

Sprawdzamy czy równanie wektorowe ma jedyne rozwiązanie zerowe na a,b,c:

$$a[1,-2,3]+b[1,01]+c[-1,-2,1]=[0,0,0]$$

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ -2a-2c=0 \\ 3a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-2a \\ c=-a \\ 0=0 \Rightarrow uklad\ \ jest\ oznaczony,\ wektory\ sa\ liniowo\ zalezne \end{cases}$$

4. Zbadać z definicji liniową niezależność podanego układu funkcji:

$a)\quad 3-x,\ 4+x,\ 2x+3;\quad w\ przestrzeni\ R[x]$

$b)\quad 2-x^3,\ 3x+2,\ x^2+x-1;\quad w\ przestrzeni\ R[x]$

Sprawdzamy czy zerowa kombinacja liniowa funkcji ma jedyne rozwiązanie zerowe na a,b,c:

$$a(3-x)+b(4+x)+c(2x+3)=0$$
$$3a-ax+4b+bx+2cx+3c=0$$
$$(-a+b+2c)x+(3a+4b+3c)=0$$
$$\begin{cases}-a+b+2c=0\\3a+4b+3c=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}a=b+2c\\b=-\frac{9}{7}c\end{cases}$$
$$\begin{cases}a=\frac{5}{7}c\\b=-\frac{9}{7}c\end{cases}$$

ODP: Układ funkcji jest liniowo zależny

Sprawdzamy czy zerowa kombinacja liniowa funkcji ma jedyne rozwiązanie zerowe na a,b,c:

$$a(2-x^3)+b(3x+2)+c(x^2+x-1)=0$$
$$2a-ax^3+3bx+2b+cx^2+cx-c=0$$
$$-ax^3+cx^2+(3b+c)x+(2a+2b-c)=0$$
$$\begin{cases}-a=0\\c=0\\3b+c=0\\2a+2b-c=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}a=0\\c=0\\b=0\end{cases}$$

ODP: Układ funkcji jest liniowo niezależny