SAD – Cwiczenia 4, 20.03 – 26.03.2003

Zadanie 1. Zadanie 2.2 z książki (str. 165).

Krótkie komunikaty pogodowe mówią czy pogoda w danym miejscu jest słoneczna (oznaczana symbolem S), czy jest wietrzna (W) oraz czy pada deszcz (D). Używając symboli algebry zbiorów, zapisać zdarzenia odpowiadające następującym pogodom: pogodzie bezwietrznej, pogodzie słonecznej i wietrznej, pogodzie bezdeszczowej i jednocześnie bezsłonecznej, pogodzie deszczowej lub wietrznej, pogodzie deszczowej lub wietrznej, ale nie jednocześnie deszczowej i wietrznej.

Zadanie 2. Talię złożoną z 52 kart rozdano 4 osobom, zwanymi dalej North, South, East and West, każda z nich otrzymała 13 kart. Dla $k = 1, 2, 3, 4$, niech N_k oznacza zdarzenie, że North ma co najmniej k asów. Analogicznie definiujemy zdarzenia S_k, E_k, W_k dla South, East and West. Podać liczbą asów, które posiada West w przypadku zajścia następujących zdarzeń:

$$W_1', \quad N_2 \cap S_2, \quad N_1' \cap S_1' \cap E_1', \quad W_2 \cap W_3',$$
$$N_1 \cap S_1 \cap E_1 \cap W_1, \quad N_3 \cap W_1, \quad (N_2 \cup S_2) \cap E_2.$$

Zadanie 3. Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5 wylosowano jedną cyfrę, a następnie drugą cyfrę z pozostałych. Zakładając, że wszystkie zdarzenia z przestrzeni zdarzeń elementarnych mają takie samo prawdopodobieństwo, że cyfra nieparzysta będzie wylosowana

a) w pierwszym losowaniu,

b) w drugim losowaniu,

c) w obu losowaniach.

Zadanie 4. Doświadczenie polega na rzucie dwoma kostkami do gry. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych. Niech A będzie zdarzeniem, że suma wyrzuconych oczek jest nieparzysta, a B zdarzeniem, że wyrzucono przynajmniej jedną szóstkę. Zakładając, że wszystkie (jest ich 36) zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, obliczyć prawdopodobieństwa zajścia następujących zdarzeń:

$$A \cap B, \qquad A \cup B, \qquad A \cup B'. \tag{$*$}$$

Załóżmy teraz, że kostki są obciążone i liczba 6 oczek wypada częściej niż inne liczby, z czego wynika że zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne. Przypuśćmy, że prawdopodobieństwa te wynoszą

$$P(i,j) = P(j,i) = \frac{1}{49} \qquad \text{dla} \;\; i,j \neq 6,$$
$$P(i,6) = P(6,i) = \frac{2}{49} \qquad \text{dla} \;\; i \neq 6,$$
$$P(6,6) = \frac{4}{49}.$$

Obliczyć nowe prawdopodobieństwa zdarzeń (*).

Zadanie 5. Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5 wylosowano jedną cyfrę, a następnie drugą cyfrę z pozostałych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że za pierwszym razem wylosowano cyfrę nieparzystą, pod warunkiem, że druga wylosowana cyfra była też nieparzysta.

Zadanie 6. Dane są trzy urny, jedna zawiera 2 białe i 3 czarne kule, druga zwiera 1 białą i 5 czarnych kul, a trzecia 6 białych i 2 czarne kule.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli, jeśli założymy, że urnę i kulę wybieramy losowo.

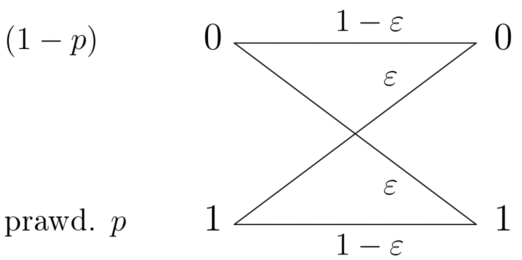
b) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli, jeśli założymy, że urnę wybieramy z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do liczby kul w niej zawartej.

Zadanie 7. Dostawca komputerów ma zapas 100 zestawów komputerowych pewnego typu. Stwierdzono, że 17 zestawów ma wadliwy twardy dysk, a 9 ma wadliwy monitor. Zakładamy, że wadliwości dysku i monitora są niezależne od siebie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany zestaw

a) ma wadliwy tylko twardy dysk,

b) nie ma wadliwego dysku ani wadliwego monitora.

Zadanie 8a. (Przepływ informacji w kanale binarnym).



Rysunek 1: Diagramy przedstawia kanał binarny przepływu informacji. Na wejściu podawqany jest znak 0 lub 1, a na wyjściu otrzymujemy znak 0 lub 1. Po drodze mogą nastąpic przekłamania i znak 0 może byc odebrany jako 1 (z prawdopodobieństwem ε), a znak 0 odebrany jako 1 (z prawdopodobienstwem ε). Prawdopodobieństwo wysłania znaku 1 jest równe p, prawdopodobieństwo wysłania znaku 0 jest równe $1-p$.

Dla kanału z rys. 1:

a) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania na wyjściu znaku 0.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania na wyjściu znaku 1.

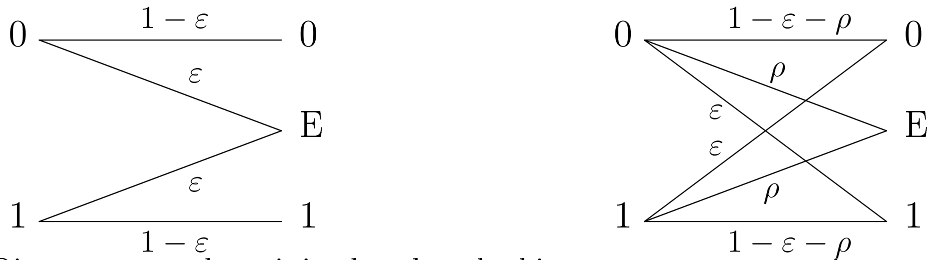
c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wysłanym znakiem był znak 0, jeśli na wyjściu otrzymano znak 0, czyli $P(\text{wyslano } 0 \mid \text{otrzymano } 0)$.

d) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wysłanym znakiem był znak 0, jeśli na wyjściu otrzymano znak 1, czyli $P(\text{wyslano } 0 \mid \text{otrzymano } 1)$.

e) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wysłanym znakiem był znak 1, jeśli na wyjściu otrzymano znak 1, czyli $P(\text{wyslano } 1 \mid \text{otrzymano } 1)$.

f) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wysłanym znakiem był znak 1, jeśli na wyjściu otrzymano znak 0, czyli $P(\text{wyslano } 1 \mid \text{otrzymano } 0)$.

Zadanie 8b. (Przepływ informacji w kanale binarnym).



Rysunek 2: Diagramy przedstawiają dwa kanały binarne z wymazywaniem znaków. E oznacza zdarzenie polegające na wymazaniu przesyłanego znaku (tzn. żaden znak nie jest odbierany na wyjściu). Prawdopodobieństwo wysłania znaku 1 jest równe p, prawdopodobieństwo wysłania znaku 0 jest równe $1-p$.

Dla kanału z lewej strony rys. 2:

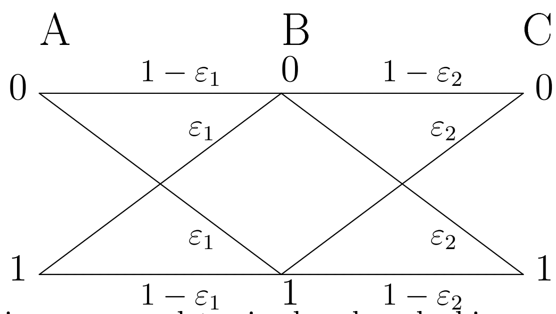
a) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania na wyjściu znaku 0.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wysłanym znakiem był znak 0, jeśli na wyjściu otrzymano znak 1.

Dla kanału z prawej strony rys. 2:

a) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania na wyjściu znaku 1.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wysłanym znakiem był znak 1, jeśli na wyjściu nie otrzymano żadnego znaku (zdarzenie E).



Rysunek 3: Diagram przedstawia dwa kanały binarne połączone w szereg. Znak wysłany w punkcie A jest odbierany w punkcie B i następnie transmitowany do punktu C. Prawdopodobieństwo wysłania w punkcie A znaku 1 jest równe p, prawdopodobieństwo wysłania w punkcie A znaku 0 jest równe $1-p$. Zakładamy, że oba kanały są probabilistycznie niezależne.

Dla połączonych kanałów z rys. 3 obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania na wyjściu (w punkcie C) znaku 0 dla prawdopodobieństwa $p = 0{,}4$ i wartości $\varepsilon_1 = 0{,}14$, $\varepsilon_2 = 0{,}21$.

Zadanie 9. (Example 2.25, Devore, p. 77)

Sześćdziesiąt procent klientów kupujących komputer osobisty zamawia również edytor tekstu, 40% zamawia arkusz kalkulacyjny, a 30% nabywców zamawia oba typy programów. Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrany klient zamawia edytor tekstu, a B oznacza, że zamawia arkusz kalkulacyjny. Obliczyć prawdopodobieństwa

$$P(A|B) = P(\text{edytor tekstu} \mid \text{arkusz kalkulacyjny}),$$
$$P(B|A) = P(\text{arkusz kalkulacyjny} \mid \text{edytor tekstu}).$$