Zadanie 1.

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu < \mu_0$

gdzie $\mu_0 = 3{,}6$

Poziom istotności $\alpha = 0{,}1$

W przypadku, gdy próba pochodzi z populacji, w której analizowana zmienna (cecha) ma rozkład normalny o nieznanym odchyleniu standardowym, do weryfikacji hipotezy zerowej wykorzystujemy statystykę testową obliczaną wg wzoru:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład t-Studenta o $n - 1$ stopniach swobody.

U nas:

$n = 16$ $\bar{x} = 3{,}3$ $s^2 = 1{,}44$, stąd $s = 1{,}2$

Zatem:

$$t = \frac{3{,}3 - 3{,}6}{1{,}2} \cdot \sqrt{16} = -1$$

Zbiorem krytycznym, wobec postaci hipotezy alternatywnej jest

$$C = \{t : t \le -t_{1-\alpha,\, n-1}\} = \left(-\infty; -t_{1-\alpha,\, n-1}\right\rangle$$

$t_{1-\alpha,\, n-1} = t_{0,9;\,15} = 1{,}3406$

Wobec tego:

$$C = \left(-\infty; -1{,}3406\right\rangle$$

Jak widać:

$$t \notin C$$

Zatem na poziomie istotności 0,1 stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Uzyskane na podstawie próby wyniki nie pozwalają twierdzić, że średni czas przetwarzania informacji dla nowego programu jest istotnie krótszy niż dla starego.

Zadanie 2.

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$

gdzie $\mu_0 = 10$

Poziom istotności $\alpha = 0{,}01$

W tym przypadku rozkład cechy (zmiennej) w populacji generalnej jest zmienną losową o rozkładzie normalnym o znanym odchyleniu standardowym. W takiej sytuacji do weryfikacji hipotezy zerowej wykorzystujemy statystykę testową obliczaną wg wzoru:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład N(0; 1).

U nas:

$n = 100$ $\bar{x} = 11$ $\sigma = 1{,}5$

Wobec tego:

$$Z = \frac{11 - 10}{1{,}5} \cdot \sqrt{100} = 6{,}667$$

Zbiorem krytycznym, wobec postaci hipotezy alternatywnej jest

$$C = \{z : z \geq z_{1-\alpha 1}\} = \langle z_{1-\alpha}; +\infty)$$

$z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}3263$

Wobec tego:

$$C = \langle 2{,}3263; +\infty)$$

Jak widać:

$$Z \in C$$

Na poziomie istotności 0,01 odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej. Wyniki uzyskane na podstawie próby pozwalają twierdzić, że czas oczekiwania na połączenie z siecią jest istotnie wyższy od podawanej przez operatora wartości 10 s.

Zadanie 3.

H_0: $\sigma = \sigma_0$

H_1: $\sigma \neq \sigma_0$

gdzie $\sigma_0 = 0{,}15$

Poziom istotności $\alpha = 0{,}05$

Gdy próba pochodzi z populacji, w której analizowana cecha (zmienna) ma rozkład N(0 ;1) o nieznanych parametrach, do weryfikacji hipotezy o odchyleniu standardowym (wariancji) wykorzystujemy statystykę testową postaci:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

statystyka ta, przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład χ^2 o $n-1$ stopniach swobody.

$n = 4$

$$\bar{x} = \frac{8{,}4}{4} = 2{,}1$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

skąd:

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$(n-1)s^2 = 0{,}1$$

Wobec tego:

$$\chi^2 = \frac{0{,}1}{(0{,}15)^2}$$

$$\chi^2 = 4{,}4444$$

Zbiorem krytycznym, wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest:

$$C = \left(0;\ \chi^2_{\alpha/2;\,n-1}\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1};\ +\infty\right)$$

$\chi^2_{\alpha/2;\,n-1} = \chi^2_{0{,}025;\,3} = 0{,}2158$ $\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1} = \chi^2_{0{,}975;\,3} = 9{,}3484$

Zbiór krytyczny ma zatem postać:

$$C = \left(0;\ 0{,}2158 \cup \left\langle 9{,}3484;\ +\infty\right)\right.$$

Jak widać:

$$\chi^2 \notin C$$

Na poziomie istotności 0,05 stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Uzyskane na podstawie próby wyniki nie pozwalają stwierdzić, że odchylenie standardowe zawartości biopaliwa istotnie różni się od zakładanej przez normę wartości 0,15.

Zadanie 4.

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$

gdzie $\mu_0 = 100$

Poziom istotności α = 0,01

W przypadku, gdy próba pochodzi z populacji, w której analizowana zmienna (cecha) ma rozkład normalny o nieznanym odchyleniu standardowym, do weryfikacji hipotezy zerowej wykorzystujemy statystykę testową obliczaną wg wzoru:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład t-Studenta o $n - 1$ stopniach swobody.

U nas:

$n = 16$ $\bar{x} = 105{,}5$ $s = 20$

Wobec tego:

$$t = \frac{105{,}5 - 100}{20} \cdot \sqrt{16} = 1{,}1$$

Zbiorem krytycznym, wobec postaci hipotezy alternatywnej jest

$$C = \{t : t \geq t_{1-\alpha,\, n-1}\} = \langle t_{1-\alpha,\, n-1}; +\infty)$$

$t_{1-\alpha,\, n-1} = t_{0,99;\,15} = 2{,}602$

Wobec tego:

$$C = \langle 2{,}602; +\infty)$$

Jak widać:

$$t \notin C$$

Zatem na poziomie istotności 0,01 stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Uzyskane na podstawie próby wyniki nie pozwalają twierdzić, że średni czas wykonania projektu przez uczestników konkursu istotnie przekracza 100 minut.