

Zadanie 1

Wyznacz elementy zbioru:

- a)  $A = ((-5, 6] \setminus \{2, 3\}) \cap \mathbb{Z} = ((-5, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, 6]) \cap \mathbb{Z} = \{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6\}$
- b)  $B = ((-5, 6] \setminus [-2, 3)) \cap \mathbb{N} = ((-5, -2] \cup [3, 6]) \cap \mathbb{N} = \{3, 4, 5, 6, \}$
- c)  $C = (\{-5, 3\} \setminus [-2, 3]) \cap \mathbb{R}_+ = \{-5\} \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$
- d)  $D = (\{-5, 3\} \cap \mathbb{R}_+) \cup ([-2, 3] \cap \mathbb{Z}_-) = \{3\} \cup \{-2, -1\}$

Zadanie 5

Ile elementów ma zbiór

- a)  $E = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ jest wielokrotnością liczby } 4 \text{ i } x < 50\}$   
**Odp:**  $E = \frac{48}{4} = 12$  ; trzeba ująć zero, dlatego **13**
- b)  $F = \{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$   
**Odp:** 1,3
- c)  $G = \{3z + 1 : z \in \mathbb{Z} \text{ i } |z| < 4\}$   
**Odp:** 7 elementów
- d)  $H = \emptyset$   
**Odp:** 0, zbiór pusty
- e)  $I = \{\emptyset\}$   
**Odp:** 1 element
- f)  $J = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$   
**Odp:** 2 elementy
- g)  $K = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$   
**Odp:** 1 element (w zbiorze ten sam element może występować tylko raz, nawet jak jest napisany wielokrotnie).

Zadanie 6

Wyznacz zbiory potęgowe zbiorów.

b)

$$\{\emptyset\} \quad ; \quad x = \emptyset$$

$$P(x) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad ; \quad P(x) = \{\emptyset\}$$

Zadanie 7Rozważmy program:  $\text{Pr}_1(n) = \{x := 0; y := 0; \text{ while } y < 20 \text{ do } y := x + 1; x := y * n \text{ od}\}$ Niech  $d$  oznacza zbiór wszystkich wartości  $d$  osiągalnych poprzez wykonanie programu  $\text{Pr}_1(n)$ .Wyznacz zbiór potęgowy zbioru  $X(2) \cap X(3)$ .

$y < 20$	$y$	$x$
	0	0
+	1	2
+	3	6
+	7	14
+	15	30
+	31	62
-		

$$x(2) = \{1, 3, 7, 15, 31\}$$

$y < 20$	$y$	$x$
	0	0
+	1	3
+	4	12
+	13	39
+	40	120
-		

$$x(3) = \{1, 4, 13, 40\}$$

$$x(2) \cap x(3) = \{0,1\}$$

$$P(x(2) \cap x(3)) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

Zadanie 11

Niech  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$ ,  $B = \{w \in \Sigma^* : \text{długość}(w) \leq 2\}$  i  $C = \{w \in \Sigma^* : \text{długość}(w) \geq 2\}$  oraz niech  $\Sigma^*$  będzie zbiorem uniwersalnym. Wyznacz:

a)  $B', B' \cap C'$

$$B' = \{w \in \Sigma^* : \text{długość}(w) > 2\} ; C' = \{w \in \Sigma^* : \text{długość}(w) < 2\}$$

$$B' \cap C' = \emptyset$$

b)  $A \cap C, A \setminus C, \Sigma \setminus B$

$$A \cap C = \{aa, bb, aaa, bbb\}$$

$$A \setminus C = \{a, b\}$$

$$\Sigma \setminus B = \{\emptyset\}$$

c)  $P(\Sigma)$

$$P(\Sigma) = \{\emptyset, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}\}$$

Zadanie 12

Rozważmy programy:

$$Pr_3 = \{x := -2; \text{ while } |x| < 3 \text{ do } x := x + 1; \text{ od}\}$$

$$Pr_4 = \{x := 0 ; y := 1, \text{ while } y < 28 \text{ do } x := x + 1; y := 3^x \text{ od}\}$$

Niech  $A$  oznacza zbiór wszystkich wartości  $x$  osiągalnych poprzez wykonanie programu  $Pr_3$  oraz niech  $B$  oznacza zbiór wszystkich wartości  $x$  osiągalnych poprzez wykonanie programu  $Pr_4$ . Wypisz lub narysuj elementy zbioru:

a)  $\{(m, n) \in A \times B : m < n\}$

b)  $\{(m, n) \in B \times A : m < n\}$

$ x  < 3$	$x$
	-2
+	-1
+	0
+	1
+	2
+	3
-	

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$y < 28$	$x$	$y$
	0	1
+	1	3
+	2	9
+	3	27
+	4	81
-		

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

a)  $\{(-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-2, 4), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-1, 4), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

b)  $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

Zadanie 13

Wyznaczyć  $\bigcap_{t \in T} A_t$  oraz  $\bigcup_{t \in T} A_t$  gdy:

a)  $T = \{2, 3, 4\}$ ,  $A_t = \mathbb{Z}_t$ , gdzie  $\mathbb{Z}_t = \{0, 1, 2, \dots, t-1\}$

$$T = \{2, 3, 4\} ; A_t = \mathbb{Z}_t = \{0, 1, 2, \dots, t-1\}$$

$$A_2 = \{0, 1\}$$

$$A_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$A_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t = A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{0, 1\} ; \bigcup_{t \in T} A_t = A_2 \cup A_3 \cup A_4 = 4$$

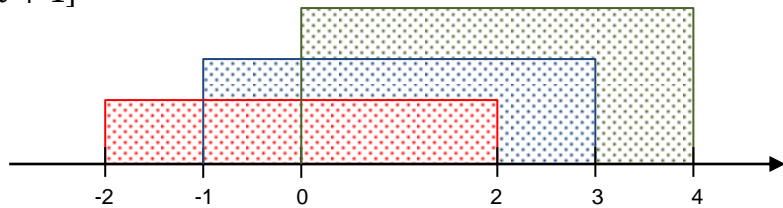
$$b) T = \{1,2,3\}, A_t = [t - 3, t + 1]$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [0,2]$$

$$A_1 = [1 - 3, 1 + 1]$$

$$A_2 = [-1, 3]$$

$$A_3 = [0, 4]$$



$$\bigcup_{t \in T} A_t = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-2, 4]$$

#### Zadanie 14:

Wyznaczyć  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  oraz  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , gdy:

$$a) A_n = \mathbb{Z}_n, \text{ gdzie } \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$$

$$A_1 = \{0\}$$

$$A_2 = \{0, 1\}$$

$$A_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$$

$$b) A_1 = \mathbb{Z}$$

$$A_2 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$A_3 = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}$$

#### Zadanie 16:

A i B oznaczają zbiory niepuste. Jaki jest związek między tymi zbiorami, jeśli:

$$a) (A \cup B) \subseteq B$$

$$\text{Odp.: } B \subseteq A \cup B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$b) A \subseteq (A \cap B)$$

$$\text{Odp.: } B = A \cup B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$c) A \subseteq (A \setminus B)$$

$$\text{Odp.: Zbiory A i B są rozłączne}$$

$$d) A \cup B = B$$

$$\text{Odp.: } A \subset B$$

#### Zadanie 18

Wskaż, które ze zdań są prawdziwe, a które fałszywe. Dla każdego fałszywego zdania podaj kontrprzykład.

$$a) \text{ Jeśli } A \cap B = A \cap C, \text{ to } B = C$$

**Odp.:** Zdanie fałszywe

$$b) (A \cap \emptyset) \cup B \text{ dla wszystkich zbiorów A i B}$$

**Odp.:** Zdanie prawdziwe

$$c) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \text{ dla wszystkich zbiorów A, B i C}$$

**Odp.:** Zdanie fałszywe

#### Ogólne twierdzenie:

$$\text{Jeśli } Z \subset U \wedge U \subset Z, \text{ to } U = Z$$