Elementy Modelowania Matematycznego

Wykład 6

Metoda simpleks

Spis treści

- Wstęp
- Zadanie programowania liniowego

Wstęp

- Omówimy algorytm simpleksowy, inaczej metodę simpleks(ów).
- Jest to stosowana w matematyce iteracyjna metoda rozwiązywania zadań programowania liniowego za pomocą kolejnego polepszania (optymalizacji) rozwiązania.

Wstęp

- Nazwa metody pochodzi od simpleksu, figury wypukłej będącej uogólnieniem trójkąta na więcej wymiarów.

Wstęp

- W przestrzeni euklidesowej:
  - Simpleks zerowymiarowy to punkt
  - Simpleks jednowymiarowy to odcinek
  - Simpleks dwuwymiarowy to trójkąt
  - Simpleks trójwymiarowy to czworościan (niekoniecznie foremny)
  - Simpleks czterowymiarowy to 5-komórka

Zadanie programowania liniowego

- Rozważamy proces, w którym występują zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$, na które nakładamy ograniczenia zapisane w postaci układu równań

Zadanie programowania liniowego

- Rozważamy proces, w którym występują zmienne $x_1,x_2,\ldots,x_n$, na które nakładamy ograniczenia zapisane w postaci układu równań

Zadanie programowania liniowego

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Zadanie programowania liniowego

- a_{ij} , b_i – znane współczynniki.
- Dopuszczamy jedynie nieujemne wartości x_j i b_i czyli:
  - $x_j >= 0;$
  - $j = 1, 2,\ldots,n;$
  - $b_i >= 0;$
  - $i = 1, 2,\ldots,m$

Zadanie programowania liniowego

- Z procesem jest związana funkcja celu Z:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

- c_j , j = 1, 2,…,n – znane współczynniki.
- Zadanie polega na maksymalizacji (minimalizacji) funkcji celu Z, spełniającej nałożone ograniczenia na zmienne.

Zadanie programowania liniowego

- Model matematyczny:

$$\text{FC: } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max$$

$$\text{O: } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n \\ b_i \geq 1 & i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Zadanie programowania liniowego

- Bardzo powszechną w zagadnieniach praktycznych odmianą ograniczeń są ograniczenia w postaci nierówności.
- To również, są zagadnienia programowania liniowego, ale nie w postaci standardowej.

Zadanie programowania liniowego

- **Przykład**
  - Zakład zamierza rozpocząć produkcję dwóch wyrobów: F_1 i F_2.
  - Wśród środków produkcyjnych, które zostaną użyte w procesie produkcji dwa są limitowane.
  - Limity te wynoszą:
    - dla środka pierwszego S_1 63 kilogramów,
    - dla środka drugiego S_2 64 kilogramy.
  - Aby wyprodukować wyrób F_1 potrzeba 9 kg środka S_1 oraz 8 kg środka S_2.
  - Aby wyprodukować wyrób F_2 potrzeba 7 kg środka S_1 oraz 8 kg środka S_2.
  - F_1 będą produkowane jednocześnie na 3 maszynach, a F_2 na 2 maszynach.
  - Koszty przestrojenia maszyn zwrócą się po wyprodukowaniu łącznie 6 sztuk wyrobów.
  - Wiedząc, że cena F_1 będzie wynosić 6 zł, a cena F_2 5 zł określić wielkość produkcji, która zoptymalizuje zysk ze sprzedaży.

Zadanie programowania liniowego

		F_1	F_2	
①	S_1	9	7	63
②	S_2	8	8	64
③	ilość maszyn	3	2	6
	cena	6	5	

Zadanie programowania liniowego

Przykład

Zmienne decyzyjne: x_1 – wielkość produkcji F1; x_2 – wielkość produkcji F2

Funkcja celu (FC): $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

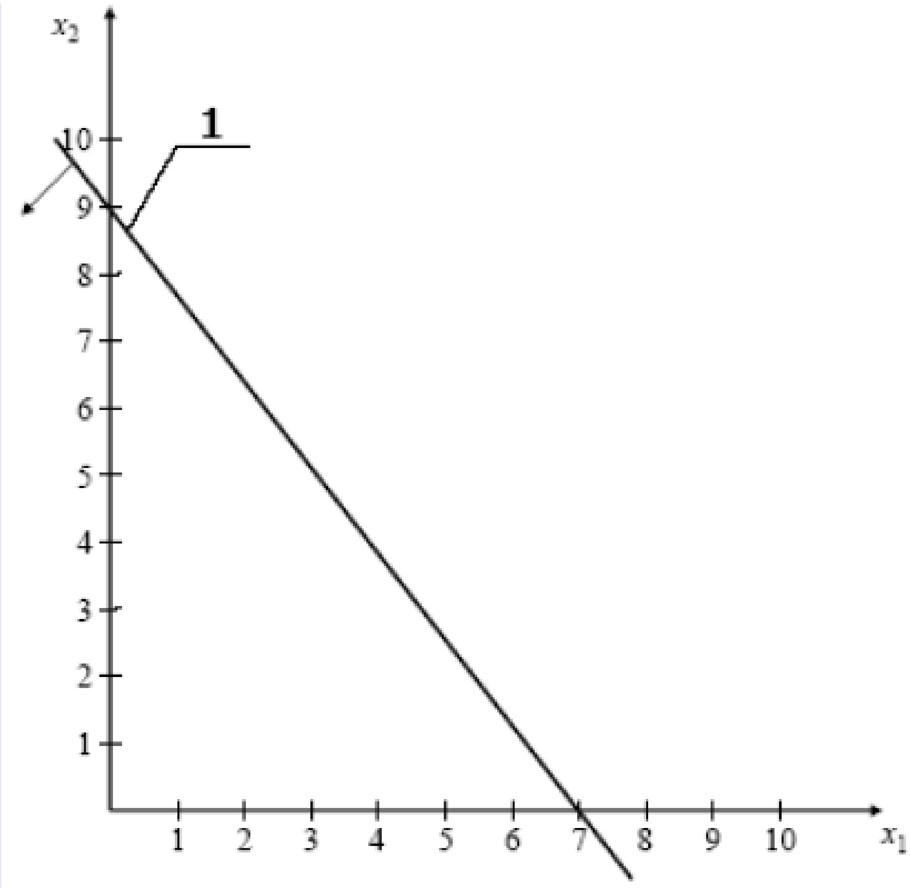
Ograniczenia (O):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 9x_1 + 7x_2 \leq 63 \\ &(2) \quad 8x_1 + 8x_2 \leq 64 \\ &(3) \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \end{aligned}$$

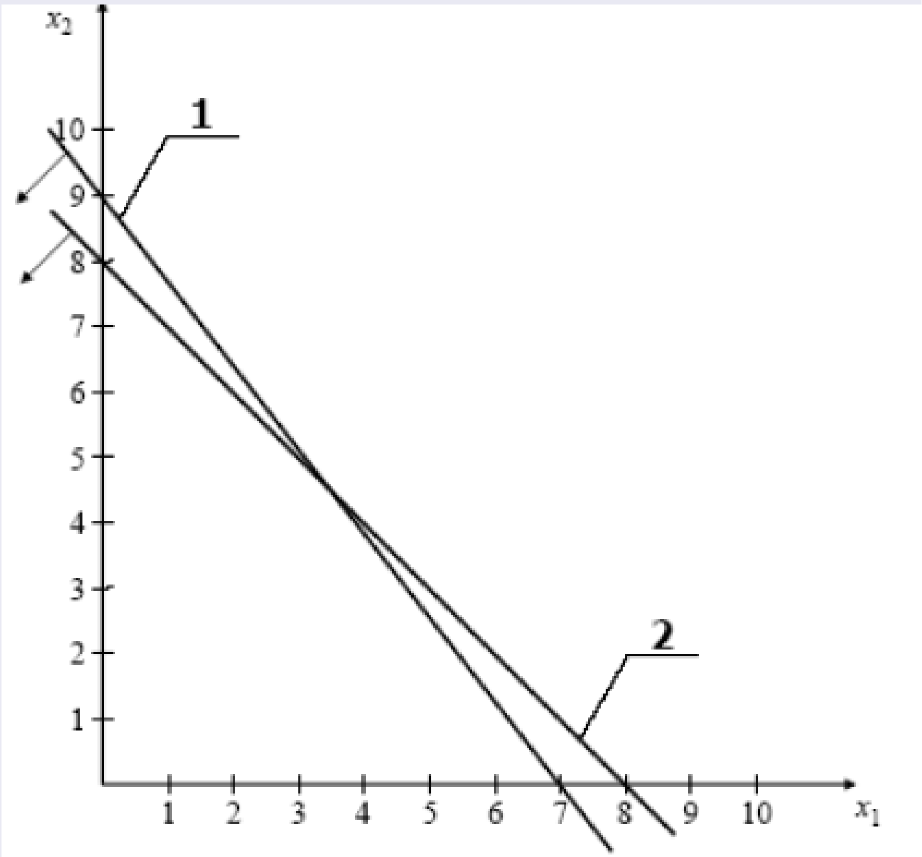
Warunki brzegowe (WB):

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

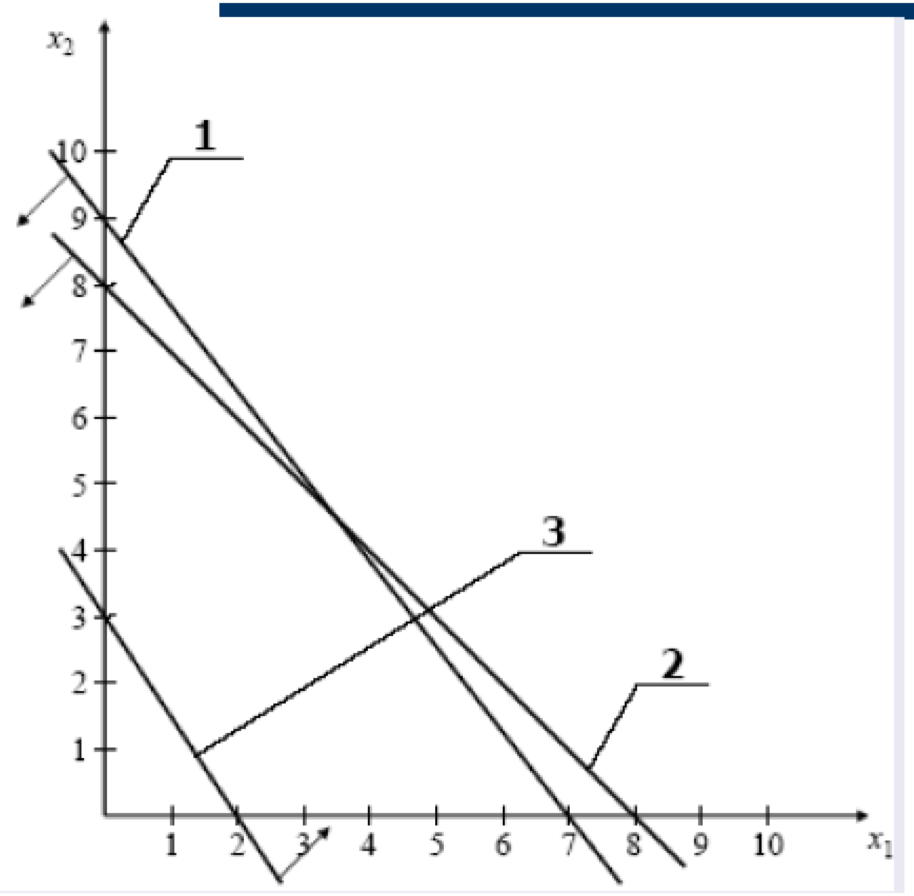
Zadanie programowania liniowego



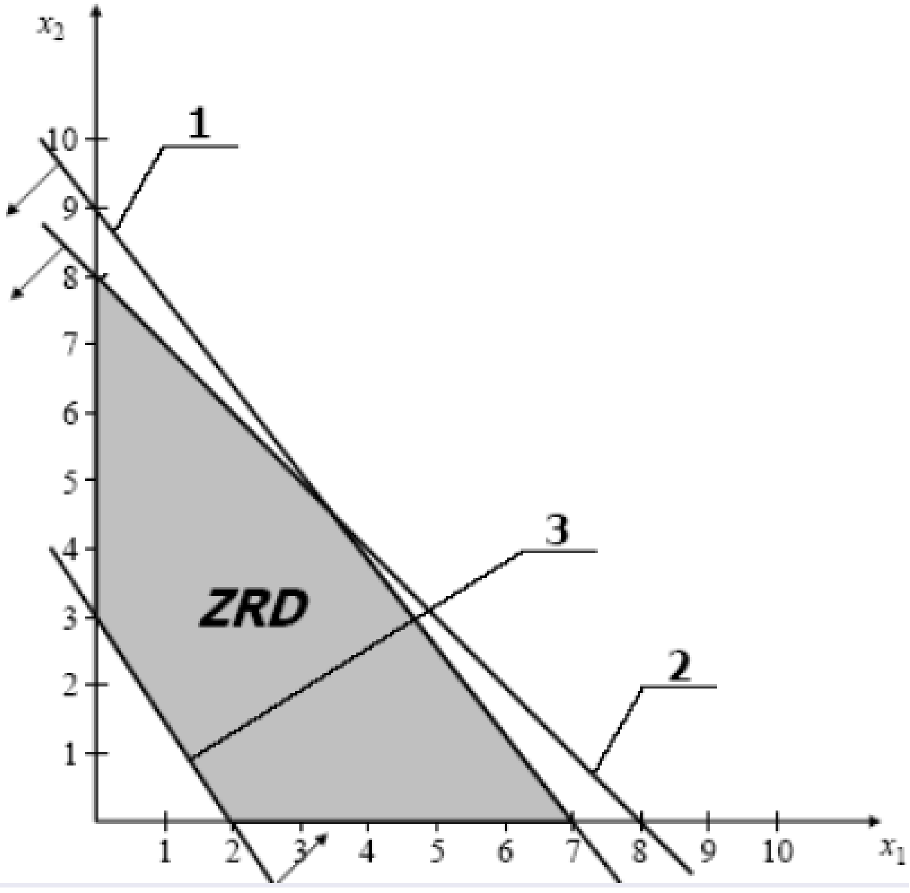
Zadanie programowania liniowego



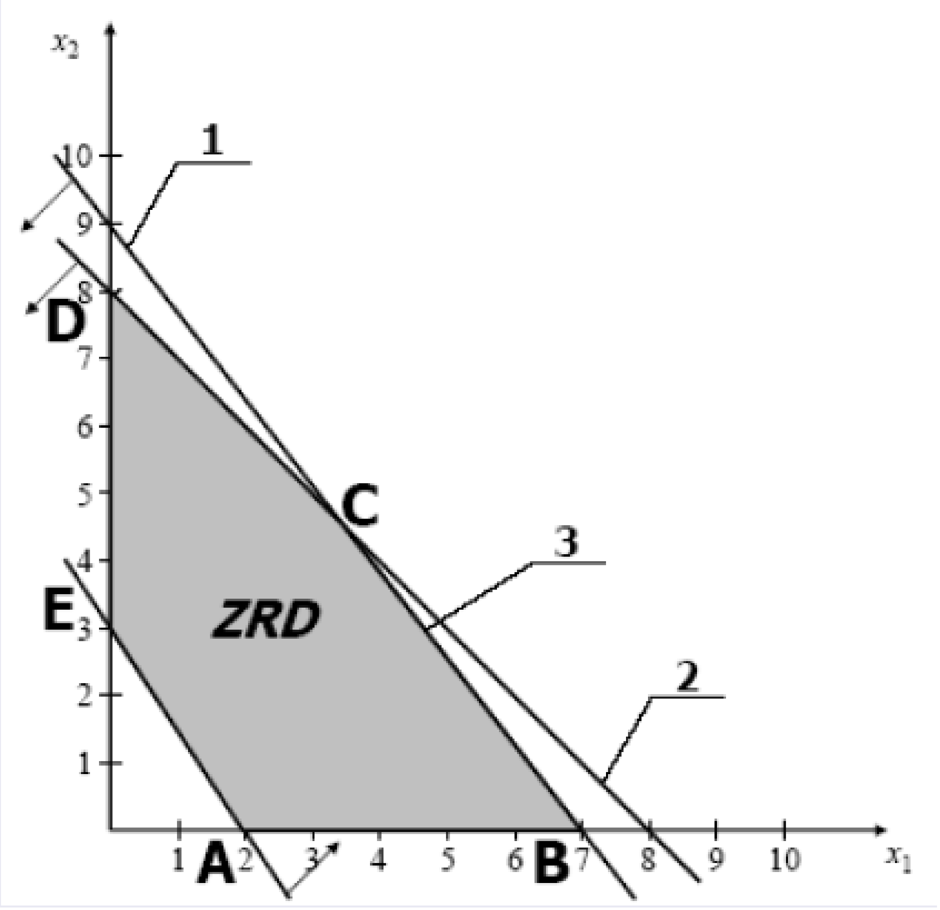
Zadanie programowania liniowego



Zadanie programowania liniowego



Zadanie programowania liniowego



Zadanie programowania liniowego

- A(2,0)
  - Z(2, 0) = 6 *2 + 5 *0 = 12
- B(7,0)
  - Z(7; 0) = 6 *7 + 5 *0 = 42
- C(3.5, 4.5)
  - Z(3.5,4.5) = 6 *3.5 + 5 *4.5 = 43.5 ! max
- D(0,8)
  - Z(0,8) = 6 *0 + 5 *8 = 40
- D(0,3)
  - Z(0,3) = 6*0 + 5*3 = 15
- Odpowiedz: Aby zysk był maksymalny, należy wyprodukować 3.5 F1 oraz 4.5 F2

Zadanie programowania liniowego

- Sprowadzenie zadania do postaci bazowej

Ograniczenie (1) $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

Aby otrzymać ograniczenie w postaci równania wprowadzamy dodatkową zmienną do ograniczenia:

$$9x_1 + 7x_2 + x_3 = 63$$

x_3 – zmienna bilansująca określa ilość środka S_1 jaki nie zostanie wykorzystany w procesie produkcji.

Zadanie programowania liniowego

- Sprowadzenie zadania do postaci bazowej

Ograniczenie (2) $x_1 + x_2 \leq 8$

Aby otrzymać ograniczenie w postaci równania wprowadzamy dodatkową zmienną do ograniczenia (podobnie jak dla (1)):

$$x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

x_4 – zmienna bilansująca określa ilość środka S_2 jaki nie zostanie wykorzystany w procesie produkcji. Dla $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ mamy: $x_4 = 8 \geq 0$

Zadanie programowania liniowego

- Sprowadzenie zadania do postaci bazowej

Ograniczenie (3) $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

Aby otrzymać ograniczenie w postaci równania wprowadzamy dodatkową zmienną do ograniczenia (podobnie jak dla (1) i (2)):

$$3x_1 + 3x_2 - x_5 = 6$$

Zadanie programowania liniowego

- Sprowadzenie zadania do postaci bazowej

x_5 – zmienna bilansująca. Dla $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ mamy: $x_5 = -6 < 0$

W postaci bazowej, w każdym ograniczeniu musi znajdować się jedna zmienna, która po wyzerowaniu wszystkich pozostałych zmiennych w ograniczeniu, jest nieujemna.

Zadanie programowania liniowego

- Wprowadzamy zatem kolejną zmienną:

$$3x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

x_6 – zmienna sztuczna. Dla $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $x_5 = 0$ mamy: $x_6 = 6 \geq 0$

Zadanie programowania liniowego

- Rozwiązanie zadania po wprowadzeniu zmiennej sztucznej nie jest równoważne z rozwiązaniem zadania początkowego.
- Byłoby równoważne tylko wtedy, gdyby w rozwiązaniu optymalnym zmienna sztuczna miała wartość zero.
- Aby zapewnić $x_6 = 0$ w rozwiązaniu optymalnym, zmienną sztuczną wprowadza się do funkcji celu.
- Współczynnik przy zmiennej sztucznej w funkcji celu dobiera się tak, aby niezerowa wartość tej zmiennej mocno pogarszała wartość funkcji celu.

$$\text{FC: } Z(x_1, x_2, x_6) = 6x_1 + 5x_2 + M x_6 \rightarrow \max$$

$M = -1000$

Zadanie programowania liniowego

- Wszystkie zmienne bilansujące również wprowadzamy do funkcji celu, ale współczynniki przy zmiennych bilansujących w funkcji celu mają wartość równą zero.

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1000x_6 \rightarrow \max$$

Zadanie programowania liniowego

Funkcja celu (FC):

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1000x_6 \rightarrow \max$$

Ograniczenia (O):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 9x_1 + 7x_2 + x_3 = 63 \\ &(2) \quad x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ &(3) \quad 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 6 \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (WB):

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

Zadanie programowania liniowego

- Wszystkie ograniczenia w postaci równań
- W każdym ograniczeniu znajduje się zmienna, która po wyzerowaniu pozostałych zmiennych ma wartość nieujemną
- Współczynnik przy zmiennej sztucznej ma wartość 1
- Wprowadzone zmienne bilansujące wprowadza sie do funkcji celu z zerowymi współczynnikami
- Wprowadzone zmienne sztuczne uwzględnia się w funkcji celu ze współczynnikami mocno pogarszającymi jej wartość

Reguły tworzenia zadania dualnego

- Z każdym zadaniem PL (zwanym pierwotnym lub prymalnym) sprzężone jest pewne inne zadanie PL zwane zadaniem dualnym (ZD).

Reguły tworzenia zadania dualnego

- Jeżeli zadaniem pierwotnym (ZP) jest zadanie:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m), \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n), \end{cases}$$

Reguły tworzenia zadania dualnego

- to zadaniem dualnym (ZD) będzie zadanie:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Reguły tworzenia zadania dualnego

- **Z relacji zachodzących między zadaniem pierwotnym a zadaniem dualnym wynika, że:**
  - w zadaniu dualnym jest tyle zmiennych, ile nierówności w zadaniu pierwotnym (każdemu warunkowi ZP odpowiada jedna zmienna ZD),
  - w zadaniu dualnym jest tyle warunków, ile zmiennych w zadaniu pierwotnym,
  - wagi funkcji celu zadania pierwotnego są wyrazami wolnymi w zadaniu dualnym,
  - wyrazy wolne zadanie pierwotnego są wagami funkcji celu w zadaniu dualnym,
  - macierz współczynników zadania dualnego jest transpozycją macierzy współczynników zadania pierwotnego,
  - jeżeli zadanie jest na maksimum, to dualne jest na minimum i odwrotnie.

Reguły tworzenia zadania dualnego

- **W przypadku ogólnym stosujemy ponadto następujące, dodatkowe reguły tworzenia zadania dualnego:**
  - jeżeli w ZP i-ty warunek jest równością, to odpowiadająca mu zmienna yi nie ma ograniczeń,
  - jeżeli w ZP i-ty warunek jest nietypową nierównością, to w ZD zmienna
    $yi \leq 0$,
  - jeżeli w ZP na zmienną xi nie nałożono ograniczeń, to j-ty warunek ZD jest równością,
  - jeżeli w ZP zmienna $xi \leq 0$, to w ZD j-ty warunek jest nietypową nierównością.

Reguły tworzenia zadania dualnego

- **Mamy następujące zadanie pierwotne o postaci standardowej:**

$$
\left.
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min, \\
&4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \geq 4, \\
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7, \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0,
\end{aligned}
\right. \quad \leftarrow \ \text{(ZP)}
$$

zmienne dualne:

y_1 ,

y_2

Reguły tworzenia zadania dualnego

- W zadaniu dualnym będą oczywiście dwie zmienne y1, y2, gdyż w ZP występują dwa ograniczenia (co zaznaczono przy ZP), a samo zadanie dualne do rozważanego zadania ZP ma postać:

$$
\begin{aligned}
&4y_1 + 7y_2 \to \max, \\
&4y_1 + y_2 \le 2, \\
&-6y_1 + 2y_2 \le 3, \\
&5y_1 + 4y_2 \le 1, \\
&y_1, y_2 \ge 0.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(ZD)}
$$

Reguły tworzenia zadania dualnego

- Należy utworzyć zadanie dualne do następującego zadania pierwotnego:

		zmienne dualne:
$6x_1 + 8x_2 \to \max,$		
$4x_1 + 6x_2 \le 10,$		$y_1 \ge 0,$
$3x_1 + x_2 = 4,$	$\leftarrow$ (ZP)	y_2 – dowolne,
$2x_1 + 2x_2 \ge 2,$		$y_3 \le 0.$
x_1 – dowolne, $x_2 \ge 0,$		

Reguły tworzenia zadania dualnego

- Zadanie dualne będzie miało trzy zmienne (bo w ZP występują trzy ograniczenia) i dwa warunki ograniczające (bo w ZP występują dwie zmienne):

$$
\begin{aligned}
&10y_1 + 4y_2 + 2y_3 \to \min, \\
&4y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 6, \\
&6y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 8, \qquad \textbf{(ZD)} \\
&y_1 \geq 0,\ y_2 - \text{dowolne},\ y_3 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Reguły tworzenia zadania dualnego

- **<u>TWIERDZENIE 1 (o istnieniu)</u>**

- **Jeżeli ZP i ZD mają rozwiązania dopuszczalne, to obydwa mają rozwiązania optymalne.**
- **Jeżeli natomiast chociaż jedno z nich nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to obydwa nie mają rozwiązań optymalnych.**

Reguły tworzenia zadania dualnego

- <u>**TWIERDZENIE 2**</u>
- **Jeżeli $x_1,x_2,\ldots,x_n$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania pierwotnego (prymalnego), a $y_1,y_2,\ldots,y_m$ - rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego, to między wartościami funkcji celu zachodzi nierówność:**

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- **Dla rozwiązań dopuszczalnych wartość funkcji celu ZP nie może być większa od wartości funkcji celu ZD.**

Reguły tworzenia zadania dualnego

- **<u>TWIERDZENIE 3 (o optymalności)</u>**
- **Jeżeli istnieją dwa takie rozwiązania dopuszczalne** $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ **(ZP) i mamy** $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$ **(ZD), że:**

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

- **to obydwa rozwiązania są rozwiązaniami optymalnymi.**

Reguły tworzenia zadania dualnego

- **Twierdzenie o równowadze wykorzystujemy do sprawdzania optymalności znanego rozwiązania dopuszczalnego lub do znajdowania rozwiązania optymalnego dla przypadku szczególnego, gdy zadanie PL ma tylko dwa warunki ograniczające.**

Interpretacja ekonomiczna zadania dualnego

- Przypomnijmy, że zadanie pierwotne opisuje problem maksymalizacji przychodu osiąganego z produkcji n wyrobów.
- Zużycie środków produkcji nie może przekroczyć zasobów, jakimi dysponujemy.
- Waga c_j oznacza cenę j-tego wyrobu, współczynnik a_{ij} – wielkość zużycia i-tego środka na produkcję jednostki j-tego wyrobu, wyraz wolny
- b_i – zasób i-tego środka produkcji,
- a zmienna x_j – wielkość produkcji j-tego wyrobu.

Interpretacja ekonomiczna zadania dualnego

- Aby nierówności w zadaniu miały sens, zmienną y_i interpretujemy jako cenę i-tego środka.
- Załóżmy, że konkurent chce nabyć od producenta środki produkcji.
- **Jaką ich cenę powinien zaoferować?**

Interpretacja ekonomiczna zadania dualnego

- Z pewnością chciałby odkupić środki produkcji najtaniej. Proponuje więc, aby suma

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- czyli wartość funkcji celu zadania dualnego (!!!), była minimalna.
- Konkurent musi się liczyć z faktem, że jeżeli zaoferuje producentowi zbyt niską cenę, to ten posiadanych środków nie sprzeda.

Interpretacja ekonomiczna zadania dualnego

- Cena za niska to taka, kiedy przychód ze sprzedaży tych środków byłby niższy od przychodu, jaki producent może uzyskać kierując je do produkcji.
- Gdyby producent sprzedał środki niezbędne do produkcji jednostki j-tego produktu po cenach y_i (i=1,2,…,m) , to dostałby sumę

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i$$

Interpretacja ekonomiczna zadania dualnego

- Opłaci się więc sprzedać środki, jeżeli:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \quad \left(j = 1, 2, \ldots, n \right)$$

Interpretacja ekonomiczna zadania dualnego

- Zadanie dualne jest więc zadaniem, jakie powinien rozwiązać konkurent pragnący nabyć środki produkcji od producenta, jeżeli chciałby działać racjonalnie i liczy na racjonalne zachowanie producenta.

Przykład

- Mały warsztat naprawia trzy rodzaje urządzeń B1, B2, B3.
- Każde urządzenie zawiera trzy podstawowe elementy: E1, E2, E3.
- Naprawa polega na demontażu i/lub montażu elementów E1, E2, E3 według określonej technologii.

Przykład

- Tabela przedstawia przebieg każdej naprawy, zysk z naprawy urządzenia określonego typu oraz zapas elementów E1, E2, E3 w firmie.

Urządzenie	Element			
	E1	E2	E3	zysk [$/szt]
B1	3	-2	-4	-1
B2	-1	4	3	3
B3	2	0	8	-2
Zapas [szt.]	7	12	10	

Algorytm simpleks

- Zadanie:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7$$

$$-2x_1 + 4x_2 \le 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Algorytm simpleks

- Pozbywamy się nierówności

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \to \max$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 7$$

$$-2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0							
2	S_2	0							
3	S_3	0							
4									

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0							
2	S_2	0							
3	S_3	0							
4									

Współczynniki przy zmiennych w funkcji celu

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

Współczynniki przy zmiennych w ograniczeniach

i	**B**	**Cb**	**-1**	**3**	**-2**	**0**	**0**	**0**	**Bi**
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	S_2	0	-2	4	0	0	1	0	12
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4									

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij}$$

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2					
1	S_1	0	3	-1					7
2	S_2	0	-2	4	0	0	1	0	12
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4									

Wiersz wskaźnikowy.

$w_j=c_j-z_j$

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij}$$

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2					
1	S_1	0	3	-1					7
2	S_2	0	-2	4	0	0	1	0	12
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	3	-2	0	0	0	

Wiersz wskaźnikowy.

$w_j = c_j - z_j$

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij}$$

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	s_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	S_1	0	3	-1	2	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	S_2	0	-2	4	0	0	1	0	[illegible]
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	[illegible]
4			-1	3	-2	0	0	0	$\boxed{0}$

Wartość funkcji celu w bieżącym rozwiązaniu

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij}$$

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
1	S_1	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	S_2	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	$\boxed{3}$	-2	0	0	0	0

Jeżeli są wartości dodatnie istnieje lepsze rozwiązanie
Wybieramy wartość maksymalną w_j

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	S_2	0	-2	4	0				
3	S_3	0	-4	3	8				
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Do bazy zostanie wprowadzona kolumna 2 czyli zmienna x_2

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3				
1	S_1	0	3	$\boxed{-1}$					
2	S_2	0	-2	4	0				
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Ujemne współczynniki pomijamy

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	S_2	0	-2	$\boxed{4}$	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	S_3	0	-4	$\boxed{3}$	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Do bazy wprowadzimy x_2 w miejsce s_2 lub s_3

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	S_2	0	-2	4	0	0	1	0	12
			-4	3	8	0	0	1	10
			-1	3	-2	0	0	0	0

12/4<10/3
czyli z bazy wychodzi s_2

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	x_2	3	[illegible]	4	0	0	1	0	12
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Zmienna x_2 zastępuje s_2
X_2 wprowadzamy ze współczynnikiem
z funkcji celu

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

Dzielimy przez wartość przy wprowadzonej zmiennej (x2) tak aby w bazie współczynnik wynosił 1

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Teraz zerujemy współczynniki w pozostałych równaniach wykorzystując równanie zawierające wprowadzoną zmienną

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10
4			-1	3	-2	0	0	0	0

drugie *3 odejmujemy od trzeciego

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			-1	3	-2	0	0	0	0

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			1/2	3	-2	0	0	0	0

0*2,5+
3*-(1/2)+
0*(-2,5)
=
-3/2

-1-(-3/2)=1/2

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			1/2	0	-2	0	0	0	0

0*0+
3*1+
0*0
=
3

3-3=0

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			1/2	0	-2	0	0	0	0

0*2+
3*0+
0*8
=
0

-2-0=-2

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			1/2	0	-2	0	0	0	0

0*1+
3*0+
0*0
=
0

0-0=0

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	[illegible]	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	[illegible]	0	-3/4	1	1
4			1/2	0	-2	0	-3/4	0	0

0*(1/4)+
3*(1/4)+
0*(-3/4)
=
3/4

0-(3/4)=-3/4

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			1/2	0	-2	0	-3/4	0	0

0*0+
3*0+
0*1
=
0

0-0=0

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			**1/2**	0	-2	0	-3/4	0	0

Istnieje wartość dodatnia kontynuujemy

Do bazy wprowadzimy x1

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	S_1	0	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			**1/2**	0	-2	0	-3/4	0	0

Jedyna dodatnia wartość czyli wprowadzamy do bazy x1 w miejsce s1

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	-1	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			**1/2**	0	-2	0	-3/4	0	0

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	-1	2,5	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			**1/2**	0	-2	0	-3/4	0	0

Dzielimy wiersz przez 2,5 tak aby współczynnik wynosił 1

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	-1	1	0	4/5	2/5	1/10	0	4
2	x_2	3	-1/2	1	[illegible]	[illegible]	1/4	0	3
3	S_3	0	-2,5	0	8	0	-3/4	1	1
4			**1/2**	0	-2	0	-3/4	0	0

Dzielimy wiersz przez 2,5 tak aby współczynnik wynosił 1

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	-1	1	0	4/5	2/5	1/10	0	4
2	x_2	3	0	1	2/5	1/5	3/10	0	5
3	s_3	0	0	0	10	1	-1/2	1	11
4			**1/2**	0	-2	0	-3/4	0	0

Zerujemy współczynniki przy zmiennej x1 przy pomocy równania 1

Algorytm simpleks

Liczymy wartości wj wiersz 4

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	-1	1	0	4/5	2/5	1/10	0	4
2	x_2	3	0	1	2/5	1/5	3/10	0	5
3	S_3	0	0	0	10	1	-1/2	1	11
4			0	0	-12/5	-1/5	-4/5	0	11

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	-1	1	0	4/5	2/5	1/10	0	4
2	x_2	3	0	1	2/5	1/5	3/10	0	5
3	S_3	0	0	0	10	1	-1/2	1	11
4			0	0	-12/5	-1/5	-4/5	0	11

Brak dodatnich wartości
Czyli
otrzymaliśmy rozwiązanie

Algorytm simpleks

- Tabela simpleksowa

i	B	Cb	-1	3	-2	0	0	0	Bi
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	-1	1	0	4/5	2/5	1/10	0	4
2	x_2	3	0	1	2/5	1/5	3/10	0	5
3	S_3	0	0	0	10	1	-1/2	1	11
4			0	0	-12/5	-1/5	-4/5	0	11

x1=4
x2=5
x3=0

S3=11

Koniec