

KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

PRAWDOPODOBIENSTWO ZAJSCIA ZDARZENIA A POD WARUNKIEM, ZE ZASZLO ZDARZENIE B

NIEZALEZNOŚĆ ZDARZEŃ

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

WIĘC

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

CO OZNACZA, ŻE ZDARZENIE B NIE MA WPŁYWU NA PRAWDOPODOBIENSTWO ZDARZENIA A

PERMUTACJE

KORZYSTAMY Z PERMUTACJI, JEŻELI DOKONUJEMY OPERACJI NA WSZYSTKICH ELEMENTACH ZBIORU NP.: NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA USTAWIĆ 3 KSIĄŻKI NA PÓŁCE. ODPOWIEDŹ: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

$$P(A) = n!$$

GDZIE n OKREŚLA LICZEBNOŚĆ ZBIORU

KOMBINACJE

KORZYSTAMY Z KOMBINACJI, JEŻELI ZE ZBIORU MAMY WYBRAĆ KILKA ELEMENTÓW I ICH KOLEJNOŚĆ NIE JEST ISTOTNA NP.: NA ILE RÓŻNYCH SPOSOBÓW MOŻEMY WYBRAĆ 3 OSOBY SPOŚRÓD 7. ODPOWIEDŹ:

$$C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 5 \cdot 7 = 35$$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

GDZIE n OKREŚLA LICZEBNOŚĆ ZBIORU, A k OKREŚLA LICZBĘ LOSOWANYCH ELEMENTÓW

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

KORZYSTAMY Z WARIACJI BEZ POWTÓRZEŃ, JEŻELI ZE ZBIORU MAMY WYBRAĆ KILKA NIEPOWTARZALNYCH ELEMENTÓW I ICH KOLEJNOŚĆ JEST ISTOTNA NP.: ILE RÓŻNYCH LICZB CZTEROCYFROWYCH MOŻNA UŁOŻYĆ Z DZIEWIĘCIU PONUMEROWANYCH OD 1 DO 9 DREWNIANYCH KLOCKÓW? ODPOWIEDŹ:

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

GDZIE n OKREŚLA LICZEBNOŚĆ ZBIORU, A k OKREŚLA LICZBĘ LOSOWANYCH ELEMENTÓW

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

KORZYSTAMY Z WARIACJI Z POWTÓRZENIAMI, JEŻELI ZE ZBIORU MAMY WYBRAĆ KILKA ELEMENTÓW, KTÓRE MOGĄ SIĘ POWTARZAĆ I ICH KOLEJNOŚĆ JEST ISTOTNA NP.: ILE RÓŻNYCH LICZB CZTEROCYFROWYCH MOŻNA UŁOŻYĆ Z LICZB OD 1 DO 9? ODPOWIEDŹ:

$$W_9^4 = 9^4 = 6561$$

$$W_n^k = n^k$$

GDZIE n OKREŚLA LICZEBNOŚĆ ZBIORU, A k OKREŚLA LICZBĘ LOSOWANYCH ELEMENTÓW

SCHEMAT BERNOULLIEGO

KORZYSTAMY ZE SCHEMATU BERNOULLIEGO W PRZYPADKU, GDY PRZEPROWADZAMY WIELE PRÓB DANEGO DOŚWIADCZENIA (NP.: RZUT MONETĄ) I CHCEMY OBLICZYĆ PRAWDOPODOBIENSTWO OSIĄGNIĘCIA k SUKCESÓW W n PRÓBACH NP.: RZUCAMY 3 RAZY MONETĄ – JAKIE JEST PRAWDOPODOBIENSTWO, ŻE RESZKA WYPADNIE DOKŁADNIE 2 RAZY: $P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

n - LICZBA PRÓB

k - OCZEKIWANA LICZBA SUKCESÓW

p - PRAWDOPODOBIENSTWO SUKCESU

q - PRAWDOPODOBIENSTWO PORAŻKI ($1-p$)

ZADANIA

1. Z OKAZJI ZJAZDU KOLEŻEŃSKIEGO SPOTYKA SIĘ 10 OSÓB. ILE NASTĄPI POWITAŃ (UŚCISKÓW DŁONI)?
2. PRZY POMOCY INDUKCJI MATEMATYCZNEJ UDOWODNIJ $P(n) = n!$
3. DO WINDY W 8-PIĘTROWYM BUDYNKU WSIADŁO 5 OSÓB. NA ILE RÓŻNYCH SPOSOBÓW MOGĄ ONI OPUŚCIĆ WINDĘ NA RÓŻNYCH PIĘTRACH?
4. W PRZEDZIALE WAGONU KOLEJOWEGO USTAWIONE SĄ NAPRZECIW SIEBIE DWIE ŁAWKI. KAŻDA Z ŁAWEK POSIADA 5 PONUMEROWANYCH MIEJSC. DO WAGONU WSIADA 5 OSÓB, Z KTÓRYCH 3 ZAJMUJĄ MIEJSCA NA JEDNEJ Z ŁAWEK, A 2 POZOSTAŁE OSOBY USIADŁY NA DRUGIEJ ŁAWCE, NAPRZECIW 2 OSÓB Z PIERWSZEJ ŁAWKI. ILE JEST MOŻLIWYCH UKŁADÓW LUDZI NA ŁAWKACH?
5. KAŻDEJ Z 4 OSÓB PRZYPORZĄDKOWUJEMY DZIEŃ TYGODNIA, W KTÓRYM SIĘ URODZIŁA. ILE JEST MOŻLIWYCH WYNIKÓW TAKIEGO PRZYPORZĄDKOWANIA, JEŻELI:
 - a. KAŻDA Z OSÓB MOGŁA SIĘ URODZIĆ W DOWOLNYM DNIU
 - b. KAŻDA Z OSÓB URODZIŁA SIĘ W INNYM DNIU TYGODNIA
6. Z CYFR: 2, 3, 4, 5, 7 UKŁADAMY LICZBY 5-CIO CYFROWE O RÓŻNYCH CYFRACH. ILE MOŻNA UŁOŻYĆ TAKICH LICZB, KTÓRE:
 - a. SĄ PODZIELNE PRZEZ 3
 - b. SĄ PODZIELNE PRZEZ 9
 - c. SĄ PODZIELNE PRZEZ 4
7. LICZBY 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 USTAWIAMY LOSOWO W CIĄG, KTÓRY POTRAKTUJMY JAKO LICZBĘ 7-CYFROWĄ (KTÓREJ PIERWSZĄ CYFRĄ NIE MOŻE BYĆ 0). ILE JEST MOŻLIWYCH TAKICH USTAWIEŃ, W KTÓRYCH OTRZYMAJEMY LICZBĘ 7-CYFROWĄ:
 - a. DOWOLNĄ
 - b. PODZIELNĄ PRZEZ 4
8. WYZNACZ : $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 9$
9. ILE JEST SPOSOBÓW USTAWIENIA W SZEREG PIĘCIU MĘŻCZYŹN I CZTERECH KOBIEC TAK, ABY:
 - a. MĘŻCZYŹNI I KOBIEC STALI NA ZMIANĘ
 - b. PIERWSZY I DRUGI STAŁ MĘŻCZYŹNA
 - c. NAJPIERW STAŁY KOBIEC, A NASTĘPNIE MĘŻCZYŹNI
 - d. PIERWSZA STAŁA KOBIEC
10. ILE JEST LICZB TRZYCYFROWYCH:
 - a. PARZYSTYCH
 - b. PODZIELNYCH PRZEZ 5
 - c. O TEJ SAMEJ CYFRZE SETEK I JEDNOŚCI
 - d. WIĘKSZYCH OD 546
 - e. MNIEJSZYCH OD 345
11. OBLICZ LICZBĘ ELEMENTÓW PEWNEGO ZBIORU SKOŃCZONEGO WIEDZĄC, ŻE MA ON 79 PODZBIORÓW CO NAJWYŻEJ DWUELEMENTOWYCH.

12. Z TALII 52 KART LOSUJEMY CZTERY KARTY. ILE JEST MOŻLIWYCH WYNIKÓW LOSOWANIA, JEŚLI WŚRÓD NICH MAJĄ BYĆ CO NAJWYŻEJ TRZY KIERY?
13. W PUDEŁKU ZNAJDUJE SIĘ 5 KUL BIAŁYCH I 4 CZARNE. NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA WYJĄĆ Z PUDEŁKA 3 KULE TAK, ABY OTRZYMAĆ:
- 3 KULE CZARNE
 - 3 KULE BIAŁE
 - DWIE KULE BIAŁE I JEDNĄ CZARNĄ
 - CO NAJMNIEJ JEDNA KULĘ BIAŁĄ
14. UŻYWAMY 32-KARTOWEJ TALII, ZAWIERAJĄCEJ OSIEM KART W CZTERECH KOLORACH. STARSZEŃSTWO KART: AS(A), KRÓL(K), DAMA(D), WALET(W), DZIESIĄTKA(10), DZIEWIĄTKA(9), ÓSEMKA(8), SIÓDEMKA(7). GRAJĄCY W JEDNYM ROZDANIU POKERA OTRZYMUJĄ PO PIĘĆ KART. ILE UKŁADÓW KART W POKERZE TO:
- FULL - TRZY KARTY TEJ SAMEJ WYSOKOŚCI I DWIE KARTY INNEJ
 - DWIE PARY - DWIE KARTY TEJ SAMEJ WYSOKOŚCI, DWIE INNEJ I OSTATNIA KARTA JESZCZE INNEJ
 - KARETA - CZTERY KARTY TEJ SAMEJ WYSOKOŚCI I JEDNA DOWOLNA Z POZOSTAŁYCH
 - KOLOR - PIĘĆ KART W JEDNYM KOLORZE, ALE NIE WSZYSTKIE KOLEJNO (BEZ POKERÓW)
15. RZUCONO 3 RAZY MONETĄ I WYPADŁA NIEPARZYSTA LICZBA ORŁÓW (ZDARZENIE B). JAKIE JEST PRAWDOPODOBIENSTWO, ŻE WYPADŁY 3 ORŁY (ZDARZENIE A)?
16. RZUCONO 2 RAZY KOSTKĄ DO GRY I W PIERWSZYM RZUCIE WYPADŁO 6 OCZEK (ZDARZENIE B). JAKIE JEST PRAWDOPODOBIENSTWO, ŻE W OBU RZUTACH WYPADNIE CO NAJMNIEJ 10 OCZEK (ZDARZENIE A)?
17. OBLICZ PRAWDOPODOBIENSTWO UZYSKANIA 3 SZÓSTEK W 3 RZUTACH KOSTKĄ.
18. OBLICZ PRAWDOPODOBIENSTWO WYLOSOWANIA DOKŁADNIE 1 KRÓLA Z TALII 52 KART W 5 LOSOWANIACH.
19. CO JEST BARDZIEJ PRAWDOPODOBNE: UZYSKANIE 500 ORŁÓW W 1000 RZUTÓW MONETĄ, CZY UZYSKANIE 5000 ORŁÓW W 10000 RZUTÓW MONETĄ?
20. GRACZ RZUCA 2 LOTKAMI DO TARCZY. PIERWSZY RZUT BYŁ LEPSZY OD DRUGIEGO. JAKIE JEST PRAWDOPODOBIENSTWO, ŻE 3 RZUT BĘDZIE GORSZY OD PIERWSZEGO?
21. DWIE OSOBY GRAJĄ W ROSYJSKĄ RULETKĘ 6-STRZAŁOWYM REWOLWEREM, W KTÓRYM ZNAJDUJĄ SIĘ 3 NABOJE, ZAŁADOWANE W TRZECH SĄSIEDNICH KOMORACH. KRĘCIMY BĘBNEM, A NASTĘPNIE GRACZ A PRZYSTAWIA SOBIE REWOLWER DO GŁOWY I STRZELA, A JEŻELI PRZEŻYJE TO SAMO ROBI GRACZ B (BEZ KRĘCENIA BĘBNEM). KTÓRY GRACZ MA WIĘKSZE SZANSE NA PRZEŻYCIE? GRACZ PIERWSZY (A) CZY GRACZ DRUGI (B)?
22. W URNIE X MAMY: 5 KUL BIAŁYCH, 4 CZARNE, A W URNIE Y: 3 KULE BIAŁE, 1 CZARNA. RZUCAMY SYMETRYCZNĄ KOSTKĄ. JEŻELI WYPADNIE PARZYSTA LICZBA OCZEK LOSUJEMY 1 KULĘ Z URNY X, JEŻELI NIEPARZYSTA LOSUJEMY 1 KULĘ Z URNY Y. JAKIE JEST PRAWDOPODOBIENSTWO WYLOSOWANIA KULI BIAŁEJ?
23. RZUCAMY TRZEMA KOSTKAMI. JAKIE JEST PRAWDOPODOBIENSTWO, ŻE NA ŻADNEJ KOSTCE NIE WYPADŁA SZÓSTKA, JEŚLI NA KAŻDEJ KOSTCE WYPADŁA INNA LICZBA OCZEK?

Czy ważna jest kolejność występowania elementów?

NIE ↙

↘ TAK

Kombinacje bez powtórzeń

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Czy elementy mogą się powtarzać?

TAK ↙

↘ NIE

Wariacje z powtórzeniami

$$W_n^k = n^k$$

Czy wszystkie elementy
są wykorzystane?

TAK ↙

↘ NIE

Permutacje bez powtórzeń

$$P_n = n!$$

Wariacje bez powtórzeń

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$