Ciągi liczbowe. Funkcje elementarne.

1. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

   a) $\frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$, b) $\frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$, c) $\frac{3}{n}-\frac{10}{\sqrt{n}}$, d) $\frac{(-1)^n}{2n-1}$,

   e) $\frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$, f) $\frac{2n+(-1)^n}{n}$, g) $\frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$, h) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$,

   i) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$, j) $\sqrt{n^2+n}-n$, k) $\sqrt[3]{n^3+4n^2}-n$, l) $\frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$,

   m) $\frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$, n) $\frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$, o) $\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$, p) $\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$,

   r) $\sqrt[n]{10^{100}}-\sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$, s) $\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$, t) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, u) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$,

   v) $\left(\frac{n+5}{n}\right)^n$, x) $\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3}$, y) $\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$, z) $\left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

2. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

   a) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$, b) $\sqrt{n^{10}-2n^2+2}$, c) $\frac{1}{2n}\cos n^3-\frac{3n}{6n+1}$,

   d) $2^{-n}\cos n\pi$, e) $\frac{n\sin n!}{n^2+1}$, f) $n(\ln(n+1)-\ln n)$

3. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

   a) $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, b) $b_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$, c) $c_n=\frac{n^3}{10^n}$,

   d) $d_n=\frac{1}{4^1+1!}+\frac{1}{4^2+2!}+\cdots+\frac{1}{4^n+n!}$

4. Określić dziedziny naturalne oraz zbiory wartości podanych funkcji:

   a) $f(x)=\log(x^2-1)$, b) $f(x)=\operatorname{ctg}\pi x$, c) $f(x)=1+2\sqrt[4]{\sin(x)}$, d) $f(x)=2^{-|x|}$

5. Uzasadnić, że podane funkcje są rosnące na wskazanych zbiorach:

   a) $f(x)=x^2,\ x\in\langle 0;\infty)$, b) $g(x)=\frac{1}{x^4+1},\ x\in(-\infty;0\rangle$, c) $h(x)=\sqrt[3]{x},\ x\in(\infty;0\rangle$;
   d) $p(x)=\sqrt{x+1},\ x\in\langle -1;\infty)$

6. Uzasadnić, że podane funkcje są malejące na wskazanych zbiorach:

   a) $f(x)=3-4x,\ x\in\mathbb{R}$, b) $g(x)=x^2-2x,\ x\in(-\infty;1\rangle$, c) $h(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\langle 0;\infty)$;
   d) $p(x)=\frac{1}{1+x},\ x\in(-\infty;-1)$

7. Określić funkcje złożone $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ oraz ich dziedziny, jeżeli:

   a) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x}$, b) $f(x)=2^x,\ g(x)=\cos x$, c) $f(x)=x^3,\ g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;
   d) $f(x)=\frac{x}{1+x^2},\ g(x)=\frac{1}{x}$

8. Znaleźć funkcje f i g takie, że $h=g\circ f$, jeżeli:

   a) $h(x)=\frac{2-|x|}{2+|x|}$, b) $h(x)=\sin^2 x$, c) $h(x)=\log(x^2+1)$, d) $h(x)=\sqrt{x+2}$

9. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

   a) $f(x)=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$, b) $g(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in(-\infty;0)$, c) $h(x)=\sqrt{x}+1,\ x\in\langle 0;\infty)$

10. Znaleźć funkcje odwrotne do podanych:

    a) $f(x)=x^2-2x,\ x\in\langle 1;\infty)$, b) $g(x)=2-\sqrt[5]{x+1},\ x\in\mathbb{R}$, c) $h(x)=x^3|x|,\ x\in\mathbb{R}$;

    d) $p(x)=\begin{cases}3^x & \text{dla} \quad x<0\\ 5^x & \text{dla} \quad x\geqslant 0\end{cases},\ x\in\mathbb{R}$

11. Wykazać, że prawdziwe są wzory:

    a) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, b) $\operatorname{tgh} x\cdot\operatorname{ctgh} x=1$, c) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$;

    d) $\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$, e) $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$, f) $\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$;

    g) $\operatorname{sh}(2x)=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$, h) $\operatorname{ch}(2x)=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$, i) $\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$