BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

$y = f(x)$

Kroki obliczania:
1. Dziedzina
2. Miejsca zerowa
3. Granice $\pm\infty$ i na krańcach dziedziny
4. Asymptoty
   a) pionowe (w punktach nienależących do dziedziny, o ile granice są w tych punktach nieskończone),
   b) ukośne
   $$mx + b \quad ; \quad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$$
5. Liczymy f'(x)
   a) jeśli f'(x) > 0, to funkcja jest rosnąca,
   b) jeśli f'(x) < 0, to funkcja jest malejąca,
   c) jeśli f'(x) = 0, to funkcja jest stała.

Jeśli $f'(x_0) = 0$ to w x_0 może być ekstremum lub punkt przegięcia.

Aby sprawdzić czy funkcja $f'(x_0) = 0$ posiada ekstremum:
1. Sprawdzamy czy f'(x) zmienia znak w x_0
2. Liczymy f''(x)
   Jeżeli $f''(x_0) > 0$ to minimum
   Jeżeli $f''(x_0) < 0$ to maksimum
   Jeżeli $f''(x_0) = 0$ to punkt przegięcia

<u>Przykład</u>:
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

$D(f): R\backslash\{3\}$
$f(x) = 0$ jeśli $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \implies x = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty$$
$$\lim_{x\to3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \left[\frac{9 - 6 + 1}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

x = 3 asymptota

Liczymy pozostałe asymptoty:
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-3} = 1$$
$$y = x+1$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-3)-(x^2-2x+1)*1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-2x+6-x^2+2x-1}{(x-3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Delta = 36-4*5$$
$$\Delta = 36-20$$
$$\Delta = 16$$
$$\sqrt{\Delta} = 4$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2n} = \frac{6-4}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2n} = \frac{6+4}{2} = 5$$

<u>Przykład</u>:
$$f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$$

$$D(f) = x - \{-2\}$$
$$f(x) = 0\ dla\ x = -3$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = \frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)^3}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = \frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)^3}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-2^-} \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = \frac{(-2+3)^3}{(2+2)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x\to-2^+} \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = \frac{(-2+3)^3}{(2+2)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$$

$$\boxed{\begin{gathered}(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^2\\(a+b)^4 = a^4+4a^{3b}+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{gathered}}$$

x = -2 – asymptota pionowa

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^3}{x(x+2)^2} = \frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)^3}{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^3 - x(x+2)^2}{(x+2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 3x^2 * 3 + 3x * 9 + 27 - x^3 - 4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 23x + 27}{(x+2)^2} = 5$$

$$y = x + 5$$

$$f'(x) = \frac{3(x+2)^2(x+2)^2 - (x+3)^3 * 2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$f'(x) = 0$$

Miejsca zerowe f'(x):

$$x(x+3)^2 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 0$$

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 * x}{(x+2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{[2(x+3) * x + (x+3)^2] * (x+2)^3 - (x+3)^2 * x * 3(x+2)^2}{(x+2)^6} =$$

$$= \frac{[x * (x+3) + (x+3)^2](x+2) - 3x * (x+3)^2}{(x+2)^4}$$

f”(-3) = 0 - nie ma ekstremum

$$f''(0) = \frac{3^2 * 2 - 0}{2^4} = \frac{3^2}{2^3} > 0 \ \text{ minimum}$$